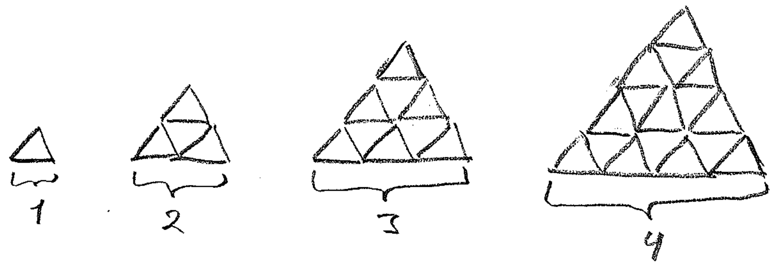
Talföljder

Inledande exempel:

Betrakta liksidiga trianglar, uppbyggda av små liksidiga trianglar med sidan 1 (kan vi tänka oss).



... osv ...

Hur många små trianglar med sidan 1 ingår i uppdelningen av en triangel med sidan n?

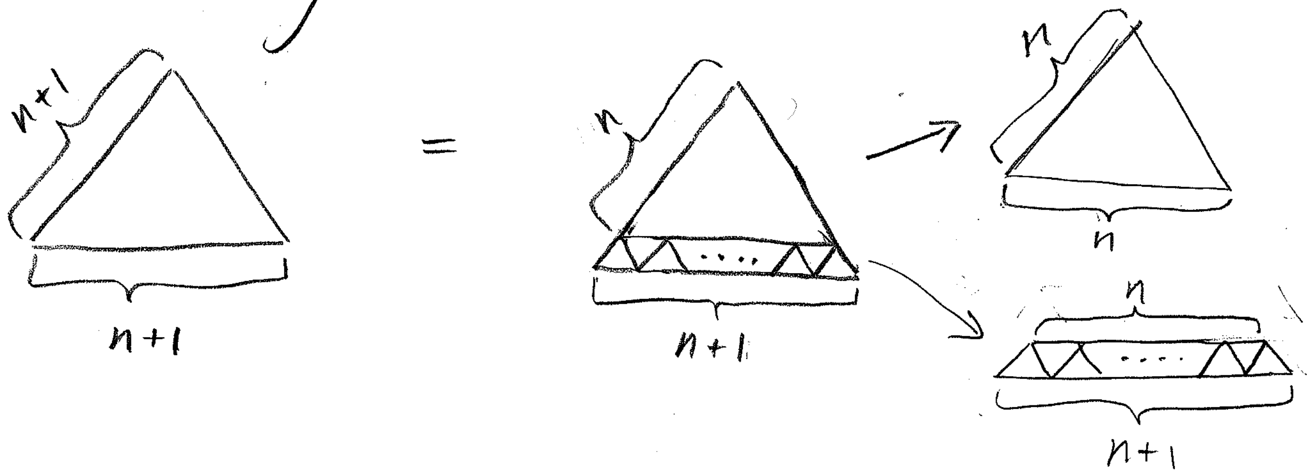
Vi kan försöka lösa problemet så här.

Kalla antalet trianglar med sidan 1 som ingår i uppdelningen av en triangel med sidan n för a_n.

Vi ser att $a_1 = 1$

$$a_2 = 4 = a_1 + (1+2)$$
$$a_3 = 9 = a_2 + (2+3)$$
$$a_4 = 16 = a_3 + (3+4)$$

Mera generellt så kan en triangel med sidan $n+1$ delas upp i en triangel med sidan n och en "remsa" bestående av $n+(n+1) = 2n+1$ små trianglar med sidan 1:



Så $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$.

Tillsammans med startvärdet $a_1 = 1$ kan alla talen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ räknas ut "rekursivt", dvs givet att vi vet vad a_n är så kan vi räkna ut a_{n+1} genom

$$a_{n+1} = a_n + 2n + 1.$$

Vi kallar ekvationerna

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1 \end{cases}$$

för en <u>rekursiv formel</u> för talföljden $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

Nu skall vi försöka hitta en funktion $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ sådan att $f(n) = a_n$.

Vi har redan sett att

$$a_1 = 1, \; a_2 = 4, \; a_3 = 9, \; a_4 = 16$$

och det ser ut som att

④

$f(n) = n^2$ beskriver talföljden, dvs. det ser ut som att $a_n = n^2$.

Men vi borde kanske bevisa det… … med induktion?

Vi vet att $a_1 = 1$ och att $1^2 = 1$ så påståendet $a_n = n^2$ är sant för $n = 1$. Vi försöker nu visa att om påståendet $a_n = n^2$ är sant för ett positivt tal $n = k \in \mathbb{N}$ så är det också sant för nästa tal $n = k+1$.

<u>Antag</u> att $a_k = k^2$ (är sant).

Vi beräknar nu a_{k+1} och ser vad det blir:

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k + 2k + 1 && \text{(enligt den rekursiva formeln)}\\
&= k^2 + 2k + 1 && \text{(enligt antagandet)}\\
&= (k+1)^2
\end{aligned}
$$

Vi vet att $a_1 = 1 = 1^2$ och vi har visat att om $a_k = k^2$ så gäller även $a_{k+1} = (k+1)^2$.

Men då måste påståendet $a_n = n^2$ vara sant för alla positiva $n \in \mathbb{N}$, eftersom varje $n \in \mathbb{N}$ kan skrivas som $n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ gånger}}$.

Vi har använt ett <u>induktionsbevis</u> för att bevisa den <u>slutna formeln</u> $a_n = n^2$ för varje $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Terminologi

En <u>talföljd</u> är helt enkelt en följd av tal

$$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$$

där $m \in \mathbb{N}$. Beroende på vad som är bekvämt i sammanhanget så kan vi låta $m=0$ eller $m=1$, osv...

En <u>rekursiv formel/definition</u> av talföljden ovan har formen

$$\begin{cases} a_m = c & \text{(startvärdet)} \\ a_{n+1} = \text{'ett uttryck som talar om hur vi beräknar } a_{n+1} \text{ om vi vet vad } a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \text{ är'} \end{cases}$$

En <u>sluten formel</u> för talföljden ovan formen $a_n = f(n)$ där $f : \{m, m+1, \ldots\} \to \mathbb{C}$.

Övn. Antalet "kulor" i respektive hög definierar en talföljd

$a_1 = 1$ $a_2 = 3$ $a_3 = 6$ $a_4 = 10$ ... osv...

Ange en rekursiv och en sluten formel för talföljden $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Bevisa med induktion att den slutna formeln stämmer.

(Svar: rekursiv formel:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + n + 1$$

sluten formel: $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$)

Övn. En talföljd definieras rekursivt enligt $a_0 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 2$. Visa att $a_n = 2^{n+2} - 2$ är en sluten formel för talföljden.

Övn. Definiera en talföljd enl. $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 3a_n + 1$.
Visa att $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$ är en sluten formel för talföljden.

Övn. Bevisa med induktion att

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Antag att $P(n)$ är ett påstående som involverar talet $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsaxiomet

Om $P(m)$ är sant och
$P(k) \Rightarrow P(k+1)$ är sant
för alla $k \geq m$
så är $P(n)$ sant för alla $n \in \{m, m+1, \dots\}$

Induktionsbevis

- Bevisa först
  Basfallet: Att $P(m)$ är sant.
- Bevisa sedan
  Induktionssteget: Om $P(k)$ är sant och $k \geq m$ så är även $P(k+1)$ sant.

Börja med att anta att $P(k)$ är sant, det s.k. induktionsantagandet (IA). Använd sedan (IA) för att bevisa att även $P(k+1)$ är sant.