Talföljder

En följd av tal

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

kallar vi helt enkelt för talföljd.

Exempel

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$$

Denna talföljd definieras av formeln $a_n = 2^n$ (så $a_0 = 2^0 = 1$, $a_1 = 2^1 = 2$, $a_2 = 2^2 = 4$, osv.)

Om en talföljd $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definieras av $a_n = f(n)$, där f är något uttryck (som) ger a_n då vi sätter in n, så kallas '$a_n = f(n)$' för en sluten formel för talföljden.

Exempel Betrakta nu talföljden som definieras genom

$$a_0 = 2$$
$$a_{n+1} = 2(a_n + 1)$$

Den första formeln talar om hur vi börjar, och den andra formeln talar om hur vi beräknar a_{n+1} förutsatt att vi har beräknat

$$a_0, a_1, \ldots, a_n.$$

En sådan definition av en talföljd kallas för rekursiv definition.

Lite notation

Uttrycket $\sum_{k=0}^{n} a_k$ betyder

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n .$$

Uttrycket $\prod_{k=0}^{n} a_k$ betyder

$$a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n .$$

Induktion

Vi börjar med ett exempel.

Låt $a_0 = 2$, $a_{n+1} = 2(a_n + 1)$.

De första talen i följden är

$$2, 6, 14, 30, \ldots$$

Om man funderar $\underbrace{\text{lite}}_{\text{(eller mycket)}}$ så verkar det som att talföljden också beskrivs av den slutna formeln

$$a_n = 2^{n+2} - 2 .$$

Detta stämmer åtminstone för de första fyra talen i följden.

Vi försöker bevisa att den slutna formeln beskriver alla talen i följden.

Vi har $a_0 = 2^{0+2} - 2 = 2$ så det stämmer för $n = 0$.

Antag nu att formeln $a_n = 2^{n+2} - 2$ stämmer för n. Vi visar nu att den stämmer även då n byts ut mot $n+1$.

25

Enligt den rekursiva definitionen så $a_{n+1} = 2(a_n + 1)$

och pga. antagandet att $a_n = 2^{n+2} - 2$

så
$$a_{n+1} = 2(2^{n+2} - 2 + 1)$$
$$= 2(2^{n+2} - 1)$$
$$= 2^{(n+1)+2} - 2$$

Vi har visat att om

$a_n = 2^{n+2} - 2$ gäller så

gäller även $a_{n+1} = 2^{(n+1)+2} - 2$

(där n byttes ut mot $n+1$).

<u>Påstående</u> Då är $a_n = 2^{n+2} - 2$ en sluten formel för talföljden (för alla $n = 0, 1, 2, \dots$).

Är påståendet sant?
Varför?

<u>Motivation till varför det är sant:</u>

(Motsägelsebevis.) Vi vet för det första att påståendet är sant för $n = 0$, eftersom $2^{0+2} - 2 = 2 = a_0$.

Om påståendet inte är sant så finns ett tal på formen $n+1$ (för talet är större än 0) så att

$$a_{n+1} \neq 2^{(n+1)+2} - 2$$

Då finns ett minsta sådant tal $n+1$. Men då stämmer formeln

$$a_n = 2^{n+2} - 2$$

(eftersom $n < n+1$) och vi har visat att då måste även

$$a_{n+1} = 2^{(n+1)+2} - 2$$

gälla. Detta motsäger antagandet att $a_{n+1} \neq 2^{(n+1)+2} - 2$.

Så vi drar slutsatsen att påståendet $a_n = 2^{n+2} - 2$ är sant för alla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Resonemanget som vi använde för att visa att $a_n = 2^{n+2} - 2$ är en sluten formel för den rekursivt definierade talföljden kallas för (matematisk) induktion.

Här kommer den allmänna beskrivningen av induktion.

Antag att P_n är ett påstående som involverar talet n (ett icke-negativt heltal).

<u>Induktionsaxiomet</u>:

Om vi kan visa att

(1) P_0 är sant, och att

(2) om P_n är sant så är även P_{n+1} sant,

så är P_n sant för alla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Man kallar (1) för "basfallet" och (2) för "induktionssteget".

Obs! Om P_m är sant och om (2) stämmer för alla $n \geq m$ så följer att P_n är sant för alla $n \geq m$.
(Detta är en variant av induktionsaxiomet.)

Övning Definiera

$$a_0 = 0 \;, \quad a_{n+1} = 3a_n + 1 .$$

Visa att $a_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$ är en sluten formel för talföljden.

Lösning: Basfall: $\dfrac{3^0 - 1}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0 = a_0$.

Induktionssteg: Antag $a_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

Då gäller att $a_{n+1} = 3a_n + 1 = 3 \cdot \dfrac{3^n - 1}{2} + 1 =$

$= \dfrac{3^{n+1} - 3 + 2}{2} = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$, så den slutna formeln gäller även för $n+1$.

Enligt induktionsaxiomet följer att formeln $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$ stämmer för alla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

<u>Övning</u> Bevisa att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

$$\left(\text{där } \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} \right).$$

<u>Basfall</u>: $2 - \frac{1+2}{2^1} = \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k}$

så formeln stämmer för $n = 1$.

<u>Induktionssteg</u>: Visa att om $n \geq 1$ och $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ så gäller

även $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}$.

Övning att göra detta.