Talområden

Hittills har vi arbetat mest med heltal, och ibland med rationella tal.

Lite terminologi och notation:

De <u>naturliga talen</u>

$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

dvs. alla tal man får genom att börja med 0 och sedan addera 1 gång på gång.

Mängden av naturliga tal betecknas $\mathbb{N}$.

Heltalen

$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

Som bekant har vi följande räkneregler för 'minus' och negativa tal: $-(-a) = a$,

$(-a)\cdot(-b) = ab$, $(-a)\cdot b = -(a\cdot b)$,

$a + (-a) = a - a = 0$.

Mängden av alla heltal betecknas $\mathbb{Z}$.

De rationella talen

Alla tal som kan skrivas på formen $\frac{p}{q}$ där p och q är heltal (dvs. alla "kvoter", eller "bråktal"), och $q \neq 0$.

Obs! Ett (rationellt) tal kan representeras av olika kvoter. Exempelvis

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

och $$\frac{4}{2} = 2 = \frac{8}{4}$$

Mängden av alla rationella tal betecknas $\mathbb{Q}$.

Decimalform

Alla tal skrivna på decimalform (med ändligt många decimaler) är rationella.

Följande exempel illustrerar hur man omvandlar decimalform till bråkform.

Exempel

$$102{,}14 = 1\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 2\cdot 10^0 + 1\cdot 10^{-1} + 4\cdot 10^{-2}$$

$$= 100 + 2 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100}$$

$$= \frac{10000 + 200 + 10 + 4}{100}$$

$$= \frac{10214}{100}.$$

Vissa rationella tal, som $\frac{2}{3}$, kan inte skrivas med ändliga decimalutvecklingar:

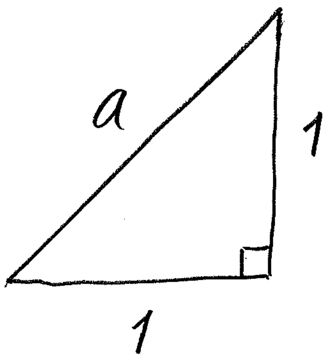
$$\frac{2}{3} \approx 0{,}66666$$

Ju fler decimaler desto bättre uppskattning.

Irrationella tal

Behöver vi fler sorters tal än de nämnda talen?

Betrakta den rätvinkliga triangeln med de angivna sidorna:



Enligt Pythagoras sats så

$$a^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

så $a = \sqrt{2}$.

Är $\sqrt{2}$ (dvs. hypotenusans längd) ett rationellt tal?

Antag att det är det, så

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ där p och q är positiva heltal.

Vi kan också anta att $\frac{p}{q}$ är förenklad så långt som möjligt, dvs. endast 1 (och -1) delar både p och q.

Vi får $2 = \frac{p^2}{q^2}$

$$2q^2 = p^2$$

så p^2 är delbar med 2 och då är även p delbar med 2 (för 2 är ett primtal).

Då finns ett heltal c så att $p = 2c$. Vi får

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2c}{q} \quad \text{och}$$

$$2 = \frac{4c^2}{q^2}$$

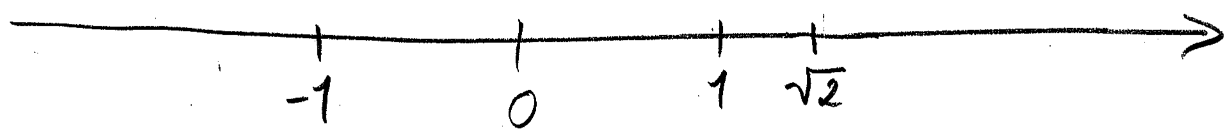
$$q^2 = 2c^2.$$

Så q^2 och därmed även q är delbar med 2. Vi har visat att både p och q är delbara med 2 vilket motsäger förantagandet att $\frac{p}{q}$ är förenklad så långt som möjligt. Motsägelsen visar att $\sqrt{2}$ inte kan vara rationelt.

För att ange längden på den givna triangeln så behöver vi alltså tal som inte är rationella. Vi kallar dem (som $\sqrt{2}$) för <u>irrationella</u>.

Reella tal

Att ge en exakt definition av de reella talen är komplicerat, men i praktiken kan man tänkta sig de reella talen som alla punkter på en tallinje.



De reella talen duger bra för att mäta alla längder, avstånd, vinklar, etc.

Varje reellt tal kan uppskattas med godtyckligt stor noggrannhet av decimalutvecklingar (dvs. av rationella tal).

Mängden av alla reella tal betecknas $\mathbb{R}$.

Med mängdnotation har vi

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

(större och större talmängder).

Som bekant så kan alla reella tal jämföras med varandra:
Om $a \neq b$ så $a < b$ eller $b < a$.