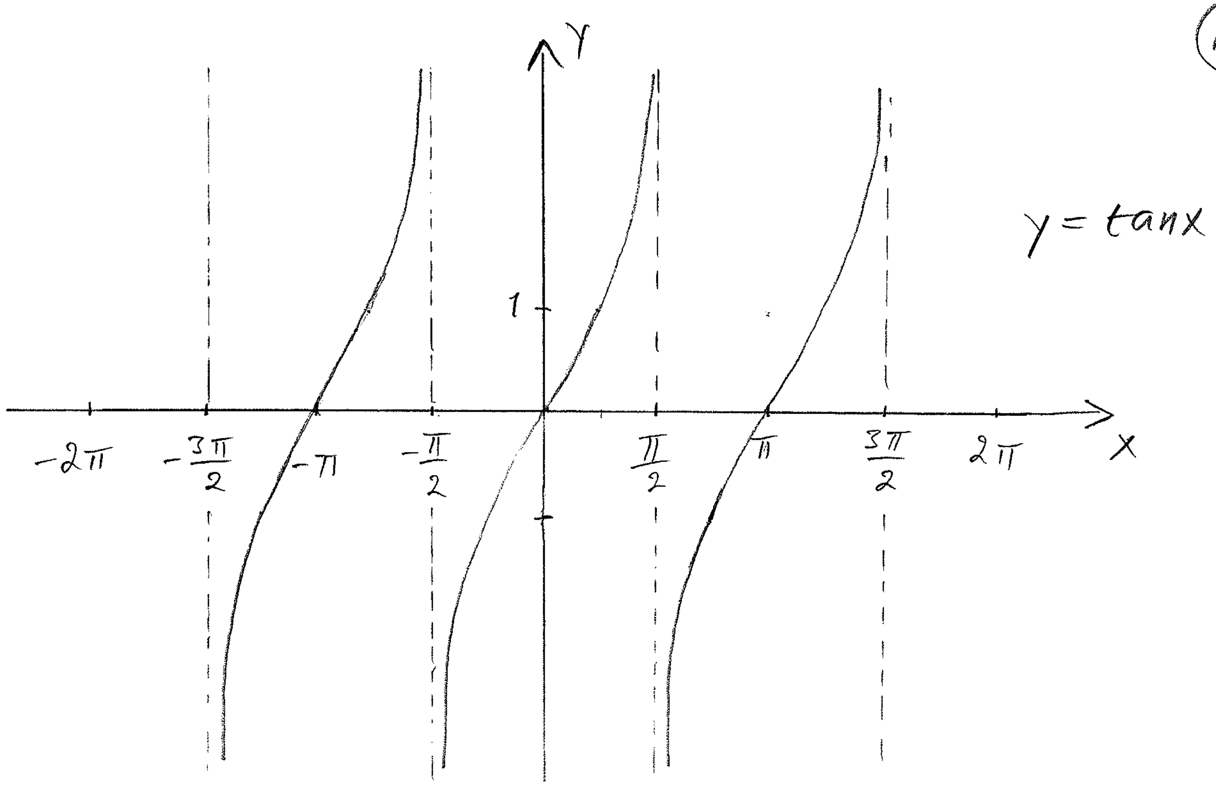


Trigonometriska formler

Pythagoras sats och definitionen av sinus och cosinus ger oss direkt den s.k "trigonometriska ettan"

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$ (för alla reella tal x).

Obs! $\sin^2 x$ betyder $(\sin x)^2$ och på samma sätt för $\cos^2 x$ och $\tan^2 x$.

Jag har redan påpekat att

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$$
$$\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$$
$$\tan(x \pm 2\pi) = \tan x.$$

Från detta och definitionerna av sin, cos och tan, följer att

$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\tan(-x) = -\tan x.$$

Additionsformler

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

Exempel $\cos\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$$= \cos\frac{4\pi}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \sin\frac{4\pi}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \cos\frac{4\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{4\pi}{3}\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \cos\frac{4\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{4\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(Men i detta fall är det enklare att räkna direkt genom

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.)$$

Dubbla vinkeln

$$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x\cos x - \sin x\sin x$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

Genom att använda $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ får man

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x)$$

$$= 2\cos^2 x - 1$$

och

$$\cos 2x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$$

Och för 'sin' har vi

$$\sin 2x = \sin(x+x) = 2\sin x \cos x$$

Genom att "vända" på

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

och $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

får vi formler för kvadraten av sinus och cosinus:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Relationer mellan 'sin' och 'cos'

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$$

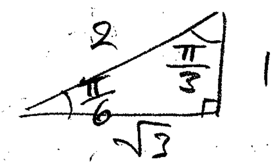
Övning Härled formler för $\sin(x-y)$ och $\cos(x-y)$.

Övning Härled en formel för $\cos\frac{x}{2}$ som bara använder $\cos x$.

Trigonometriska ekvationer

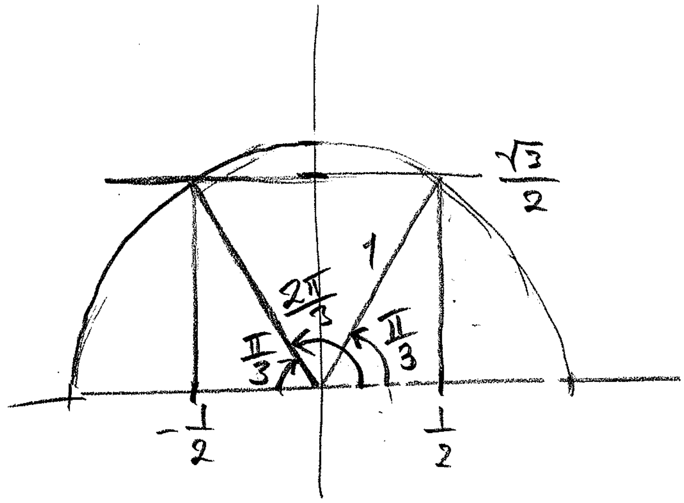
Övning Lös $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lösning. Det räcker att finna alla $0 \le x < 2\pi$ som löser $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ för alla andra lösningar har formen $x \pm 2\pi n$ där n är ett godtyckligt heltal. (Detta pga. att $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$ för alla x.) Betraktelse av triangeln



och enhetscirkeln

139



(I 3:e och 4:e kvadranten är $\sin x$ negativ.)

... visar att de enda möjligheterna (där $0 \le x < 2\pi$) är $x = \frac{\pi}{3}$ och $x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Alltså ges alla lösningar av

$$x = \frac{\pi}{3} \pm 2\pi n \quad \text{där } n = 0, 1, 2, \ldots$$

och $x = \frac{2\pi}{3} \pm 2\pi n$ ——— " ———

Obs! Från $\sin x = \sin y$ kan vi inte dra slutsatsen att $x = y$. För (exempelvis) $\frac{\pi}{3} \neq \frac{2\pi}{3}$ och $\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3}$.

Övning Finn alla $0 \leq x \leq \pi$ som löser $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lösning Låt $y = 2x$.

På liknande sätt som i föregående övning så finner man att

$$\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

har lösningarna $y = \frac{\pi}{6}$ och $y = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ om $0 \leq y \leq 2\pi$. Vi får

$$2x = y = \frac{\pi}{6} \iff x = \frac{\pi}{12}$$ och

$$2x = y = \frac{11\pi}{6} \iff x = \frac{11\pi}{12}.$$

Övning Finn alla x i $[-2\pi, 2\pi]$ som löser $\sin^2 x = \frac{1}{2}$.

Svar: $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4},$

$-\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}.$

Övning Finn alla x i $[0, 2\pi)$ som uppfyller $3\cos^2 x = \sin^2 x$

Lösning:

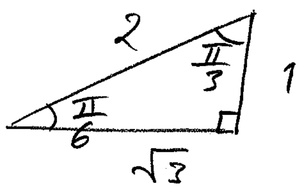
(Om $\cos x = 0$ så $\sin x \neq 0$ och då är x inte en lösn.)

$$3\cos^2 x = \sin^2 x$$

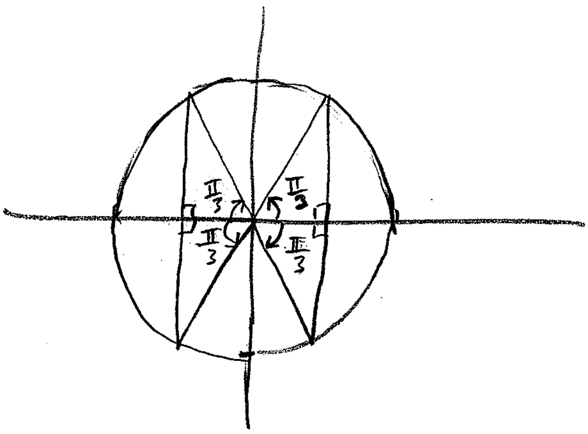
$$\Longleftrightarrow \quad 3 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \tan^2 x$$

$$\Longleftrightarrow \quad \tan x = \pm\sqrt{3}.$$

Betraktelse av triangeln



(så $\sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$) och cirkeln



.... visar att de enda möjligheterna är

$\frac{\pi}{3}$, $\pi - \frac{\pi}{3}$, $\pi + \frac{\pi}{3}$, $2\pi - \frac{\pi}{3}$ dvs.

$\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

Övning Finn alla $0 \leq x < 2\pi$ som löser $\sin 6x + \cos 3x = 0$

Lösning $\sin 6x + \cos 3x = 0$

$\Leftrightarrow \sin(2 \cdot 3x) = -\cos 3x$

"dubbla vinkeln" $\Leftrightarrow 2 \sin 3x \cos 3x = -\cos 3x$

Antag först att $\cos 3x \neq 0$, och vi får

$$\sin 3x = -\frac{1}{2}.$$

Låt $y = 3x$. Vi söker först alla lösningar till $\sin y = -\frac{1}{2}$ där $0 \leq y < 3 \cdot 2\pi = 6\pi$. Vi har $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ och betraktelse av cirkeln visar att i intervallet $[0, 2\pi)$ så har $\sin y = -\frac{1}{2}$ lösningarna

$$\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \text{ och } 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}.$$

På intervallet $[0, 6\pi)$ får vi <u>dessutom</u>

lösningarna

$$\frac{7\pi}{6} + 2\pi = \frac{19\pi}{6}, \quad \frac{11\pi}{6} + 2\pi = \frac{23\pi}{6}$$

$$\frac{7\pi}{6} + 4\pi = \frac{31\pi}{6}, \quad \frac{11\pi}{6} + 2\pi = \frac{35\pi}{6}$$

Eftersom $y = 3x$ så får vi lösningarna

$$x = \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{19\pi}{18}, \frac{23\pi}{18}, \frac{31\pi}{18}, \frac{35\pi}{18}.$$

i intervallet $[0, 2\pi)$ genom division med 3.

För att få med alla lösningar behöver vi även betrakta fallet

$\cos 3x = 0$ (eftersom sådant x löser ursprungsekv.).

Genom substitution $y = 3x$ och lösning av $\cos y = 0$ får man dessutom lösningarna $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ och $\frac{11\pi}{6}$ på intervallet $[0, 2\pi)$.