

INDUKTIONSAXIOMET

Anta att för varje naturligt tal n har vi ett påstående P_n (som handlar om n). Vi önskar bevisa att P_n är sann för varje $n \in \mathbf{N}$. I denna situation kan man ha nytta av det s. k. *induktionsaxiomet*:

Induktionsaxiomet

Låt P_n vara ett påstående som beror på det naturliga talet n . Antag att

(1) Påståendet P_0 är sant.

(2) Implikationen

$$P_p \implies P_{p+1}$$

är sann för varje heltal $p \geq 0$.

Då är P_n sann för alla naturliga tal $n \geq 0$.

Vi illustrerar hur induktionsaxiomet kan användas med ett exempel.

Exempel: Visa att

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

för alla naturliga tal n .

Lösning: Påståendet P_n kan skrivas $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$. Vänsterledet för n kallar vi VL_n , och högerledet för n kallar vi HL_n . Dvs $VL_n = \sum_{k=0}^n 2^k$ och $HL_n = 2^{n+1} - 1$. Vi ska bevisa att $VL_n = HL_n$ för alla naturliga tal n genom att använda induktionsaxiomet. Vi måste därför visa (1) och (2). Att visa (1), dvs att P_0 är sann, kallas för att göra **bassteget**, och att visa implikationen i (2) kallas för att göra **induktionssteget**.

Bas: Vi måste visa att $VL_0 = HL_0$. Men $VL_0 = 2^0 = 1$ och $HL_0 = 2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$, så basen stämmer.

I induktionssteget visar man att *om* påståendet gäller för ett visst heltal p , *så* gäller det också för nästa heltal $p + 1$. Man börjar med att anta att P_p är sann för ett (godtyckligt) heltal $p \geq 0$. Detta kallas för att göra ett *induktionsantagande*. Därefter gör man själva induktionssteget, som alltså innebär att bevisa att P_{p+1} är sann. Man får då använda sig av att P_p är sann, som man har antagit i induktionsantagandet. Om man lyckas med det har man bevisat implikationen i (2).

Induktionsantagande: $VL_p = HL_p$ för ett visst (men godtyckligt) heltal $p \geq 0$.

Induktionssteg: Vi måste visa att $VL_{p+1} = HL_{p+1}$. Vi har

$$\begin{aligned} VL_{p+1} &= 1 + 2 + 4 + \dots + 2^p + 2^{p+1} = \left(\sum_{k=0}^p 2^k \right) + 2^{p+1} = VL_p + 2^{p+1} = [enl. Ind. Ant.] \\ &= HL_p + 2^{p+1} = 2^{p+1} - 1 + 2^{p+1} = 2 \cdot 2^{p+1} - 1 = 2^{p+2} - 1 = HL_{p+1}. \end{aligned}$$

Alltså har vi visat att om P_p är sann, så gäller också att P_{p+1} är sann.

Vi har nu visat både (1) och (2), så enligt induktionsaxiomet får vi dra slutsatsen att P_n är sann för alla naturliga tal n .