

Komplexa tal: Begrepp och definitioner

Komplexa tal uppstod ur det faktum att vissa andragradsekvationer, exempelvis $x^2 + 1 = 0$, saknar lösningar bland de reella talen. Med tiden lärde man sig att utnyttja och räkna med de "kvadratrötter" ur negativa tal som uppkom när man försökte lösa ekvationer av denna typ. Tricket är att man formellt *inför* ett tal i som har egenskapen att dess kvadrat är lika med -1 . Med hjälp av detta tal kan man sedan lösa alla andragradsekvationer. Formellt går det till som följer:

Ett *komplext tal* definieras som ett par (a, b) , där a och b är reella tal. Komplexa tal adderas och multipliceras enligt följande regler:

$$\begin{aligned}(1) \quad & (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \\(2) \quad & (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).\end{aligned}$$

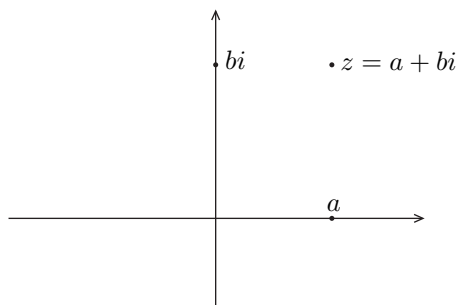
Notera att $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$ och $(a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$. Tal på formen $(x, 0)$ beter sig alltså likadant med avseende på addition och multiplikation som vanliga reella tal, och man kan visa att de även i övrigt fungerar som sådana. Man *identifierar* därför sådana tal med vanliga reella, och skriver $(a, 0) = a$. I synnerhet är $1 = (1, 0)$ och $0 = (0, 0)$. Mängden av komplexa tal betecknas med $\mathbb{C}$.

Talet $(0, 1)$ kallas för den *imaginära enheten* och brukar betecknas med bokstaven i . Enligt (2) gäller att $i^2 = (0, 1)^2 = (-1, 0) = -1$. Varje komplext tal kan nu skrivas som $a + bi = (a, b)$, och adderas och multipliceras enligt följande formler:

$$\begin{aligned}(3) \quad & (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \\(4) \quad & (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

Bokstäverna z och w är vanliga för att beteckna komplexa tal. För ett komplext tal $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ definieras *realdelen* av z som $\operatorname{Re} z = a$. *Imaginärdelen* av z är $\operatorname{Im} z = b$. Observera att både $\operatorname{Re} z$ och $\operatorname{Im} z$ alltid är *reella* tal. Om t ex $z = \sqrt{2} - i$ så är $\operatorname{Im} z = -1$, ingenting annat.

Som vi sett motsvarar varje komplex tal $z = a + bi$ ett par av reella tal (a, b) , vilket i sin tur kan betraktas som koordinaterna för en punkt i planet. Således motsvarar varje komplext tal en punkt i planet och vice versa (se figur 1).



Figur 1: Det komplexa talplanet.

Om $z = a + bi$ är ett komplext tal, så definierar man $-z = -a - bi$. *Differensen* $w - z$ mellan två komplexa tal w och z definieras nu som $w + (-z)$. De flesta av de vanliga räknereglerna för reella tal gäller även för komplexa. Exempelvis är

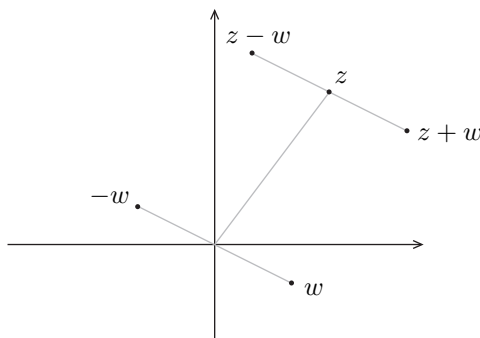
- (5) $zw = wz$ (kommutativitet)
- (6) $(uw)z = u(wz)$ (associativitet)
- (7) $z(u + w) = zu + zw, (u + w)z = uz + wz$ (distributivitet)
- (8) $zw = 0 \Rightarrow (z = 0 \text{ eller } w = 0)$ (inga nolldelare)

för alla $u, w, z \in \mathbb{C}$. I praktiken kan man räkna med komplexa tal precis som med vanliga reella tal, och överallt där i^2 dyker upp ersätta det med -1 .

Exempel: Låt $z = 3 + 4i$ och $w = 2 - i$. Nu är

$$\begin{aligned} z + w &= (3 + 4i) + (2 - i) = (3 + 2) + (4i - i) = 5 + 3i, \\ z - w &= 3 + 4i - (2 - i) = 3 - 2 + 4i - (-i) = 1 + 5i, \\ zw &= (3 + 4i)(2 - i) = 3 \cdot 2 - 3i + 4 \cdot 2i - 4i^2 = (6 + 4) + (-3 + 8)i = 10 + 5i. \end{aligned}$$

Geometriskt kan man förstå addition och subtraktion av komplexa tal enligt figur 2 nedan. Till den geometriska tolkningen av multiplikation av komplexa tal återkommer vi när vi behandlar polär form och exponentform.



Figur 2: Geometrisk tolkning av addition och subtraktion.

□

Kvoten $\frac{z}{w}$ mellan $z, w \in \mathbb{C}$ ($w \neq 0$) är enligt definition det tal som har egenskapen att $\frac{z}{w}w = w\frac{z}{w} = z$. Att ett sådant (entydigt) tal alltid existerar om $w \neq 0$ är en konsekvens av (8) ovan. Vi återkommer till hur man praktiskt räknar ut kvoten längre fram.

Det *komplexa konjugatet* av $z = a + bi$ definieras som talet $\bar{z} = a - bi$. Geometriskt kan $\bar{z}$ ses som speglingen av punkten z i talplanet i den reella axeln. Följande räkneregler gäller för $z, w \in \mathbb{C}$:

- (9) $\bar{\bar{z}} = z,$
- (10) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w},$
- (11) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w},$
- (12) $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w} \quad \text{om } w \neq 0.$

Ytterligare några användbara likheter (bevisa dem!) är:

$$(13) \quad \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Exempel: Låt $z = 4 - 2i$. Nu är $\bar{z} = 4 + 2i$ och

$$z\bar{z} = (4 - 2i)(4 + 2i) = 4^2 - (2i)^2 = 16 - (-4) = 20.$$

□

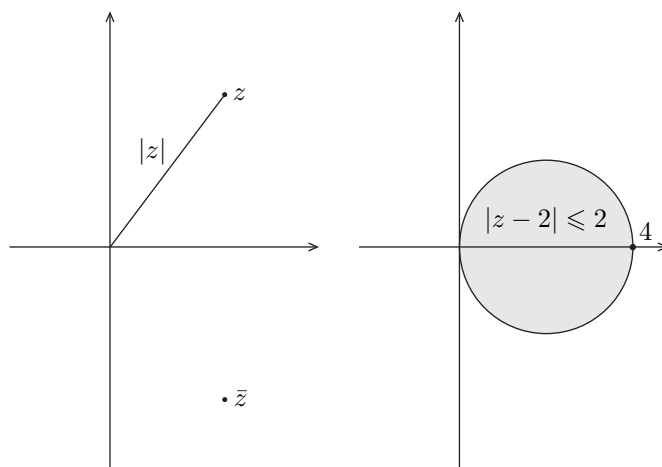
I allmänhet gäller, för $z = a + bi$, att

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

vilket är ett reellt, icke-negativt tal. Vi har

$$z\bar{z} \geq 0 \quad \text{och} \quad z\bar{z} = 0 \text{ om och endast om } z = 0.$$

Nu definierar vi *absolutbeloppet* av $z \in \mathbb{C}$ som $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Geometriskt kan absolutbeloppet tolkas som avståndet i planet mellan punkten (a, b) och origo. Avståndet mellan två tal z och w i talplanet kan, i analogi med det reella fallet, uttryckas som $|z - w|$. Observera att om z är reellt (det vill säga om $b = 0$) så är $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} = |a|$, och vi får alltså det vanliga absolutbeloppet av det reella talet a .



Figur 3: Geometrisk tolkning av absolutbelopp och konjugat.

För absolutbeloppet gäller följande räkneregler för alla $z, w \in \mathbb{C}$:

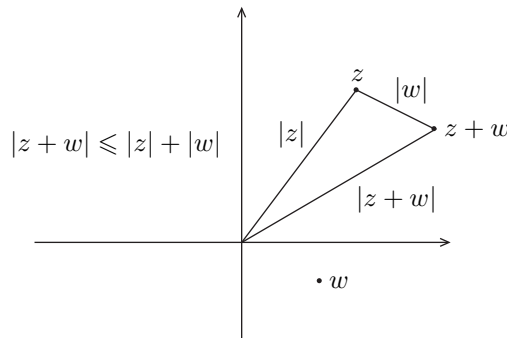
$$(14) \quad |\bar{z}| = |z|$$

$$(15) \quad |zw| = |z||w|$$

$$(16) \quad |z/w| = |z|/|w| \quad (w \neq 0)$$

$$(17) \quad |z \pm w| \leq |z| + |w| \quad (\text{triangelolikheten}).$$

Olikhet (17) kallas för triangelolikheten eftersom den geometriskt säger att summan av längderna av två sidor i en triangel är större än eller lika med längden av den tredje sidan (se figur 4).



Figur 4: Geometrisk tolkning av triangelolikheten.

Exempel:

1. Om $z = 3 + 4i$ så är $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.
2. Absolutbeloppet av $w = 1 - \sqrt{3}i$ är $|w| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$.
3. För $z, w \in \mathbb{C}$ som ovan gäller $|zw| = |z||w| = 5 \cdot 2 = 10$.

Gör inte misstaget att blanda in den imaginära enheten i i uträkningen av absolutbeloppet! Allför ofta ser man "kalkyler" av typen $|w| = |1 - \sqrt{3}i| \stackrel{!}{=} \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3}i)^2} = \sqrt{1-3} = \sqrt{-2} = \dots?!$ $\square$

Nu kan vi ge oss på division av komplexa tal. Metoden man brukar använda för att förenkla en kvot $\frac{z}{w}$ är att förlänga med $\bar{w}$, varvid nämnaren blir ett reellt tal. Det hela illustreras enklast med några exempel.

Exempel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+i} &= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}. \\ \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{\sqrt{2} - \sqrt{2}i} &= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^2}{(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)} = \frac{2(1+i)^2}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2}i)^2} \\ &= \frac{2(1+2i+i^2)}{2+2} = \frac{4i}{4} = i. \end{aligned}$$

$\square$

För den teoretiskt intresserade avslutar vi denna del med att ge ett bevis för (17).

Bevis för triangelolikheten: Låt $z, w \in \mathbb{C}$. Vi skall visa att $|z+w| \leq |z| + |w|$. Från detta följer sedan att $|z-w| \leq |z| + |w|$, ty $|z-w| = |z+(-w)| \leq |z| + |-w| = |z| + |w|$.

Eftersom både $|z+w|$ och $|z| + |w|$ är icke-negativa, reella tal, är ekvationen $|z+w| \leq |z| + |w|$ ekvivalent med $|z+w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$, d v s $|z+w|^2 - (|z| + |w|)^2 \leq 0$. Vi har

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + \bar{z}w \\ &= |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w \end{aligned}$$

och

$$(|z| + |w|)^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|$$

varvid

$$|z + w|^2 - (|z| + |w|)^2 = z\bar{w} + \bar{z}w - 2|z||w|.$$

Nu gäller, enligt (9) och (13), att $z\bar{w} + \bar{z}w = z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} = 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$. Dessutom gäller för varje komplext tal u att $\operatorname{Re} u \leq |u|$. (Varför? Illustrera geometriskt!) Med hjälp av detta, samt reglerna (14) och (15), får vi

$$\begin{aligned} |z + w|^2 - (|z| + |w|)^2 &= z\bar{w} + \bar{z}w - 2|z||w| \\ &= 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) - 2|z||\bar{w}| = 2\underbrace{(\operatorname{Re}(z\bar{w}) - |z\bar{w}|)}_{\leq 0} \leq 0. \end{aligned}$$

Därmed är triangelolikheten bevisad. $\square$

Övningar för den teoretiskt intresserade:

Samtliga räkneregler (5)–(16) går att verifiera för den som är intresserad. De flesta är dock av rutinkaraktär. Några godbitar är (13), (15) och (8). Lämpligtvis tar man hjälp av (15) när man bevisar (8). När detta är gjort kan man bevisa existens och entydighet av kvoten $\frac{z}{w}$ mellan två komplexa tal z och w , där $w \neq 0$. Det vill säga man bevisar följande sats:

Sats 1 Låt $z, w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$.

1. Det finns ett tal $u \in \mathbb{C}$ sådant att $uw = wu = z$.
2. Om $u_1w = u_2w$ så gäller $u_1 = u_2$.

Punkt 2 säger att det bara kan finnas ett tal u som uppfyller punkt 1. Detta tal är det som kallas kvoten, $\frac{z}{w}$ av z och w . För att visa 1 kan man multiplicera ekvationen $uw = z$ med det komplexa konjugatet till w . För att visa 2 bör man ta hjälp av regeln (8).

Några ytterligare övningar:

1. Om $\overline{z\bar{w}} = z\bar{w}$ och $w \neq 0$, vad kan man då säga om talet z ?
2. Om $\overline{z\bar{w}} = z\bar{w}$ för alla $z \in \mathbb{C}$, vad kan man då säga om talet w ?
3. Visa att ekvationen $z^2 = a$ alltid har två lösningar, om a är ett reellt tal skilt från noll.

Polär form och exponentform

Varje punkt (a, b) i planet bestäms entydigt av följande data:

1. Avståndet mellan (a, b) och origo.
2. I vilken riktning man måste gå från origo för att komma till (a, b) . Detta kan uttryckas genom att ange den riktade vinkeln från den positiva x -axeln till linjesegmentet mellan 0 och (a, b) .

Detta faktum kan utnyttjas för att ge en framställning av komplexa tal, som ofta är mycket användbar när det kommer till multiplicera och dividera dessa, samt lösa vissa typer av ekvationer.

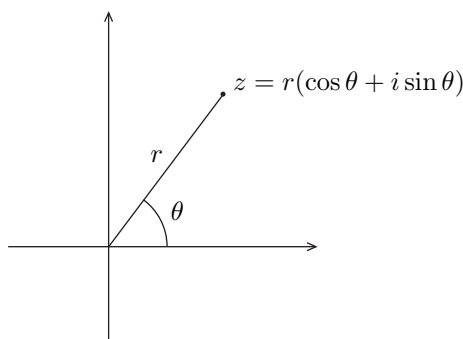
Låt $z = a + bi$ vara ett nollskilt, komplext tal. Då är $|z| \neq 0$ och $\frac{z}{|z|} = \frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i$. Därmed gäller

$$(18) \quad \left(\frac{a}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{b}{|z|}\right)^2 = \left|\frac{z}{|z|}\right|^2 = \left(\frac{1}{|z|}|z|\right)^2 = 1^2 = 1.$$

Punkten $\left(\frac{a}{|z|}, \frac{b}{|z|}\right)$ ligger alltså på enhetscirkeln, och således finns det ett tal θ sådant att $\frac{a}{|z|} = \cos \theta$ och $\frac{b}{|z|} = \sin \theta$. Talet $z = a + bi$ kan nu skrivas som

$$(19) \quad z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Detta kallas för den *polära formen* för z (formen $z = a + bi$ kallas den *kartesiska*). Vinkeln θ sägs vara ett *argument* för z och man skriver $\theta = \arg z$.



Figur 5: Ett komplext tal med belopp och argument.

Talet θ är den riktade vinkeln från den positiva x -axeln till linjesegmentet mellan 0 och z . Observera att θ inte är entydigt bestämt av z . För varje heltal n gäller att $z = |z|(\cos(\theta + 2\pi n) + i \sin(\theta + 2\pi n))$. Talet θ är alltså bara bestämt upp till multipler av 2π . Detta gör att notationen $\theta = \arg z$ egentligen är något vanskelig, då det strängt taget inte finns *ett* argument till z , utan oändligt många. I praktiken vållar dock detta sällan några missförstånd.

Exempel: Vi har $|1 + i| = \sqrt{2}$. För att sätta $1 + i$ på polär form beräknar vi

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

(kom ihåg att $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Talet $\frac{\pi}{4}$ är alltså ett argument för $1 + i$. $\square$

Observera att om $z = a + bi$ och $a \neq 0$ så är $\frac{b}{a}$ lutningen på linjen som går genom 0 och z . Lutningen för en linje som bildar vinkeln θ mot positiva x -axeln kan även skrivas som $\tan \theta$. Om $\theta = \arg z$ så gäller

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{b}{a}.$$

För exemplet $z = 1 + i$ ovan gäller $\arg z = \frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$. Detta gäller allmänt när $\arg z \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Om $\arg z \notin]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ så är $\arg z \neq \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$, eftersom $\arctan x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Exempel: Låt $z = -1 + i$. Vi har $|z| = \sqrt{2}$ och

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Således är $\arg z = \frac{3\pi}{4}$, men $\arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \arctan \frac{1}{-1} = -\frac{\pi}{4} = \arg z - \pi$. $\square$

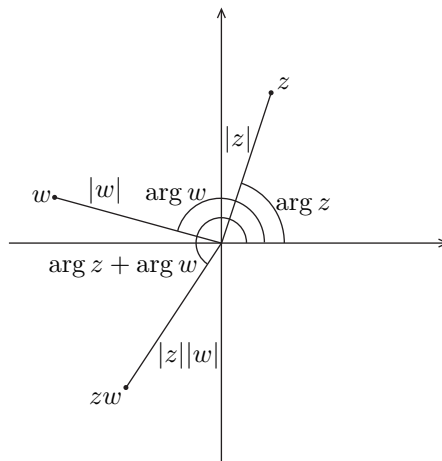
Härnäst skall vi se, vad som händer med argumentet vid multiplikation av två komplexa tal $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ och $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$. Med hjälp av additionsformlerna för sinus och cosinus får vi

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 ((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

Vi har alltså

$$(20) \quad \begin{cases} |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \\ \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \end{cases}$$

för alla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Detta betyder att vid multiplikation av två komplexa tal multipliceras absolutbeloppen, medan *argumenten adderas*. Utifrån (20) kan man även visa att $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$.



Figur 6: Komplex multiplikation i det komplexa talplanet.

Exempel: Vill man ha exempelvis kvoten $\frac{1+i}{1-i}$ på polär form kan det vara enklare att först skriva om täljare och nämnare på polär form, och sedan utföra divisionen:

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right).$$

Så blir

$$\begin{aligned} \frac{1+i}{1-i} &= \frac{\sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2} (\cos (-\frac{\pi}{4}) + i \sin (-\frac{\pi}{4}))} = \frac{(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})}{(\cos (-\frac{\pi}{4}) + i \sin (-\frac{\pi}{4}))} \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$\square$

Om $z \in \mathbb{C}$ är ett tal med $|z| = 1$ så kan det enligt ovan skrivas som $z = \cos \theta + i \sin \theta$ där $\theta \in \mathbb{R}$ är ett argument till z . Givet $n \in \mathbb{N}$ är nu, enligt (20), $|z^n| = |z|^n = 1$ och

$$\arg z^n = \underbrace{\theta + \dots + \theta}_n = n\theta.$$

Således gäller

$$(21) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (\text{de Moivres formel})$$

Det är inte svårt att visa att (21) även gäller om n är ett negativt heltal, och därmed för samtliga $n \in \mathbb{Z}$.

Exempel: Beräkna $(\sqrt{3} - i)^{100}$:

Sätt $z = \sqrt{3} - i$. Vi har

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

och således

$$z = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right).$$

Nu blir $|z^{100}| = |z|^{100} = 2^{100}$ och $\arg z^{100} = 100 \arg z = 100 \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -16\pi - \frac{2\pi}{3}$. Alltså gäller att

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - i)^{100} &= z^{100} = 2^{100} \left(\cos \left(-16\pi - \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-16\pi - \frac{2\pi}{3} \right) \right) \\ &= 2^{100} \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right) = 2^{100} \left(-\frac{1}{2} + i \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \\ &= -2^{99}(1 + i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

□

Det har visat sig praktiskt att definiera $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Varje komplext tal kan då skrivas som $re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. För ett komplext tal $z = a + bi$ definierar vi vidare

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

Det visar sig att de vanliga räknereglerarna för exponentialfunktionen är uppfyllda. Exempelvis är

$$(22) \quad re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta},$$

$$(23) \quad e^{a+bi} e^{c+di} = e^{(a+c)+(b+d)i} = e^{a+c} e^{(b+d)i}.$$

Exempel: $e^{2+\pi i} = e^2(\cos \pi + i \sin \pi) = -e^2$

□

Andragradsekvationer

Med komplexa tal är det möjligt att lösa alla andragradsekvationer, med såväl reella som komplexa koefficienter.

Vi börjar med att lösa en ekvation på formen

$$z^2 = w$$

där $w \in \mathbb{C}$ är ett fixt komplext tal, till exempel

$$(24) \quad z^2 = 3 - 4i.$$

Vi ansätter $z = x + iy$, vilket ger oss $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$. Ekvation (24) ger då

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 3 - 4i.$$

Genom att identifiera real- och imaginärdel i denna ekvation får vi ekvationssystemet

$$(25) \quad \begin{cases} x^2 - y^2 &= 3, \\ 2xy &= -4. \end{cases}$$

Vi löser ut y ur den andra ekvationen och får

$$(26) \quad y = -\frac{2}{x}.$$

Den första ekvationen i systemet ger oss då

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{4}{x^2} &= 3 \\ \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Eftersom $x^2 \geq 0$ så får vi

$$x^2 = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

och $x = \pm 2$. Vi tar nu hjälp av ekvation (26) för att få ut värdena för y . Om $x = 2$ så är

$$y = -\frac{2}{x} = -\frac{2}{2} = -1.$$

Då $x = -2$ har vi

$$y = -\frac{2}{x} = -\frac{2}{-2} = 1.$$

Lösningarna till ekvation (24) är alltså

$$z = x + iy = \pm(2 - i).$$

Ett alternativt sätt att lösa ekvation (24) är att ta hjälp av likheten $|z|^2 = x^2 + y^2$. Om z är en lösning till ekvation (24) har vi

$$|z|^2 = |z^2| = |3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Vi får alltså ytterligare en ekvation: $x^2 + y^2 = 5$. Tillsammans med ekvationssystemet (25) har vi då

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 3, \\ x^2 + y^2 &= 5, \\ 2xy &= -4. \end{cases}$$

Genom att lägga ihop de två första ekvationerna i systemet får vi $2x^2 = 8$. Alltså är $x^2 = 4$ och $x = \pm 2$. Som tidigare utnyttjar vi nu ekvation (26) och får åter rötterna

$$z = x + iy = \pm(2 - i).$$

Nu kan vi lösa ekvationer på formen $z^2 = w$, där $w \in \mathbb{C}$ är ett fixt komplext tal. Härnäst ska vi med hjälp av kvadratkomplettering lösa andragradsekvationer med komplexa koefficienter.

Exempel: Lös ekvationen $z^2 + (2 - 4i)z + 2 - 16i = 0$.

Lösning: Vi börjar med att kvadratkomplettera.

$$\begin{aligned} z^2 + (2 - 4i)z + 2 - 16i &= 0 \\ \Leftrightarrow (z + 1 - 2i)^2 - (1 - 2i)^2 + 2 - 16i &= 0 \\ \Leftrightarrow (z + 1 - 2i)^2 = (1 - 2i)^2 - 2 + 16i &= -3 - 4i - 2 + 16i = -5 + 12i. \end{aligned}$$

Vi sätter $w = z + 1 - 2i$ och får ekvationen

$$w^2 = -5 + 12i.$$

Denna ekvation kan vi lösa som i det tidigare exemplet. Vi sätter därför $w = x + iy$ och får

$$x^2 - y^2 + 2xyi = -5 + 12i.$$

Genom att identifiera real- och imaginärdel får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= -5, \\ 2xy &= 12. \end{cases}$$

Som tidigare utnyttjar vi att

$$x^2 + y^2 = |w|^2 = |w^2| = |-5 + 12i| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

och får systemet

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= -5, \\ x^2 + y^2 &= 13, \\ 2xy &= 12. \end{cases}$$

Vi lägger ihop de två första ekvationerna och får $2x^2 = -5 + 13 = 8$. Det vill säga $x^2 = 4$ och $x = \pm 2$.

Från $2xy = 12$ får vi

$$y = \frac{6}{x}.$$

Om $x = 2$ så är $y = 3$ medan $x = -2$ ger $y = -3$. Det vill säga

$$w = x + yi = \pm(2 + 3i).$$

Nu är det dags att komma ihåg att $w = z + 1 - 2i$. Vi löser ut z och får

$$z = -1 + 2i + w = -1 + 2i \pm (2 + 3i),$$

vilket ger oss de två lösningarna

$$\begin{aligned} z_1 &= -1 + 2i + 2 + 3i = 1 + 5i, \\ z_2 &= -1 + 2i - (2 + 3i) = -3 - i. \end{aligned}$$

□

Den binomiska ekvationen

Vi ger oss nu i kast med ekvationer på formen

$$z^n = w$$

där $w \in \mathbb{C}$ är ett fixt komplext tal skilt ifrån noll och $n \geq 1$.

Exempel: Lös ekvationen $z^4 = -4$.

Lösning: Vi har sett tidigare att det är lätt att multiplicera komplexa tal på polär form. Vi skriver därför både högerled och vänsterled på polär form. Eftersom

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

där $r = |z|$ och $\theta = \arg(z)$, så är

$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta).$$

Skrivet på polär form är

$$-4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Ekvationen $z^4 = -4$ blir nu

$$r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

vilket ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} r^4 &= 4, \\ 4\theta &= \pi + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Eftersom $r \geq 0$ så är $r = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$. Argumentet θ får vi ut från den andra ekvationen:

$$\theta = \theta_k = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

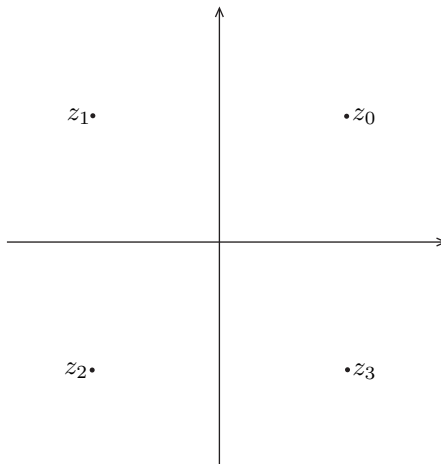
Därmed har vi lösningarna

$$z = z_k = \sqrt{2}(\cos \theta_k + i \sin \theta_k).$$

Sinus och cosinus är periodiska funktioner med period 2π . Därför är $z_k = z_{k+4}$ för alla $k \in \mathbb{Z}$. Vi får således fyra lösningar

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 1 + i, \\ z_1 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = -1 + i, \\ z_2 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = -1 - i, \\ z_3 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 1 - i. \end{aligned}$$

Lösningarna består av fyra punkter i det komplexa talplanet vilka utgör hörnen i en kvadrat centrerad i 0 (se figur 7).



Figur 7: Lösningarna till ekvationen $z^4 = -4$.

□

Lösningsmetoden vi använde ovan kan användas för att lösa godtyckliga ekvationer på formen

$$z^n = w$$

där $w \in \mathbb{C}$ är ett fixt komplext tal skilt ifrån noll och $n \geq 1$.

Först skriver vi z på polär form:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

där $r = |z|$ och $\theta = \arg(z)$. Då är

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Nu skriver vi högerledet på polär form:

$$w = |w|(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Ekvationen $z^n = w$ blir då

$$r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = |w|(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

som har lösningarna

$$\begin{cases} r &= |w|^{\frac{1}{n}}, \\ \theta &= \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

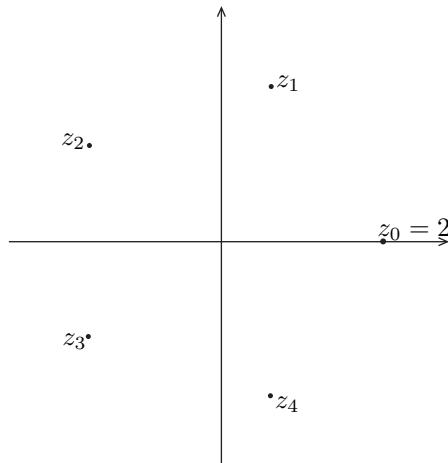
Lösningarna till $z^n = w$ är alltså

$$z = z_k = |w|^{\frac{1}{n}} \left(\cos \left(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n} \right) \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Återigen behöver vi bara ta med $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$. Därefter upprepar sig lösningarna. Vi kan även skriva lösningarna med hjälp av den komplexa exponentialfunktionen. Lösningarna till $z^n = w$ kan då skrivas

$$z = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

De utgör hörnen i en regelbunden n -hörning centrerad i 0 i det komplexa talplanet (se exemplet i figur 8).



Figur 8: Lösningarna till ekvationen $z^5 = 32$.