

Polynom

Inledning

Ett uttryck av typen $x^3 + 4x^2 - x^3 + 2$ kallas för ett polynom. Det är en summa där termerna är produkter av variabler och ett tal, som kallas **koefficient**. Ordet polynom är en sammansättning av *polys* (grekiska) och *nomen* (latin), som betyder *många namn* eller *många termer*.

4.1 Polynomfunktioner

I det här kapitlet ska vi studera polynomfunktioner. Vi börjar med en definition.

DEFINITION

Varje polynom $p(x)$ kan skrivas på formen

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

Koefficienterna $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ och a_n är komplexa konstanter och $n \in \mathbb{N}$.

Om $a_n \neq 0$ säger man att polynomet är av grad n eller av n :te graden.

EXEMPEL 4.1 $3 - 2x + 8x^2$ är ett polynom av andra graden.
 $x^{16} - x^{17}$ är ett polynom av 17:e graden. $\square$

EXEMPEL 4.2 Talet 3 kan skrivas som $3 \cdot x^0$ och är därmed ett polynom av grad 0. $\square$

Man brukar säga att polynomet $p(x) = 0$, dvs. $a_n = 0$ för alla n , saknar grad. Det kallas för nollpolynomet.

Två polynom är lika endast om de har samma koefficienter. Om polynomets koefficienter är reella säger vi att polynomet är reellt, annars sägs polynomet vara komplext.

Om $p(x)$ är ett polynom kan vi sätta in ett reellt eller komplext tal a i polynomet och beräkna polynomets värde. Genom att vi kan utföra denna insättning kan vi betrakta polynomet $p(x)$ som en funktion.

EXEMPEL 4.3 Låt $p(x) = x^2 - 2$ och bestäm $p(1)$. *Lösning:* $p(1) = 1^2 - 2 = -1$. $\square$

Vi inför beteckningen **deg p** för polynomet p 's gradtal. Detta är en förkortning av engelska *degree* eller franska *dégré*.

EXEMPEL 4.4 Vi bildar ett nytt polynom $h(x)$ genom att addera de två polynomen $f(x) = x^2 + x - 2$ och $g(x) = -x^2 + 3$. Då blir summan $h(x) = x^2 + (-x^2) + x - 2 + 3 = x + 5$. Observera att $\deg f = \deg g = 2$, men $\deg h = 1$. $\square$

Produkten av två polynom beräknar vi genom att multiplicera det ena polynomet med samtliga termer i det andra polynomet

EXEMPEL 4.5 $(3 - 2x + 8x^2) \cdot (1 + x^2) = (3 - 2x + 8x^2) \cdot 1 + (3 - 2x + 8x^2) \cdot x = 3 - 2x + 8x^2 + 3x - 2x^2 + 8x^3 = 3 + x + 8x^2 + 8x^3$. $\square$

Vi ser att produkten av andragradspolynomet och förstegradspolynomet blir ett tredjegradspolynom, dvs. gradtalet hos produkten är summa av faktorernas gradtal. Detta gäller allmänt.

SATS 4.1

Om p och q är två polynom och ingen av dem är nollpolynomet, så är

$$\deg pq = \deg p + \deg q$$

I det här kapitlet ska vi studera ekvationer av typen $p(x) = 0$, där p är ett polynom. Ekvationen kallas för en polynomekvation. En lösning till ekvationen, dvs. en rot, är polynomets nollställe. Vi kan alltså hitta ett polynoms nollställen genom att finna rötterna till polynomekvationen.

EXEMPEL 4.6 Bestäm polynomet $p(x) = 8 - 2x$ nollställe. *Lösning:* $8 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 4$. Polynomets nollställe är 4. $\square$

Testproblem för avsnitt ett

1. Avgör om följande funktioner är polynomfunktioner, och ange i så fall deras grad.

a) $f(x) = 7$

b) $f(x) = x$

c) $f(x) = x^{17} - 17^x$

d) $f(x) = 1/x$

e) $f(x) = 0$

2. Förenkla

a) $(x^5 + 3x^2 - x) - (x^4 - 8x^2 + 1)$

b) $(x^5 + 3x^2 - x) \cdot (x^4 - 8x^2 + 1)$

3. Bestäm samtliga nollställen till följande polynom

a) $(x - 1)(x + 2)(2x - 3)$

b) $x^2 - 9$

c) $4x^2 + 4x - 3$

◇

4.2 Delbarhet

Precis som vi kan definiera delbarhet för tal kan vi göra det för polynom.

DEFINITION

Om $p(x)$ och $q(x)$ är polynom så är $p(x)$ delbart med $q(x)$ bara om det finns ett polynom $r(x)$ sådant att $p(x) = q(x) \cdot r(x)$

Påståendet " $q(x)$ delar $p(x)$ " skrivs $q(x)|p(x)$

EXEMPEL 4.7 $q(x) = x + 1$ delar $p(x) = x^2 - 1$ eftersom $x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$ □

Delbarhetsreglerna för tal har sina motsvarigheter för polynomen.

Om p, q, r, f och g är polynom så gäller att

(1) om $p|q$ och $p|r$ så $p|(q + r)$

(2) om $p|q$ så $p|qr$

(3) om $p|q$ och $p|r$ så $p|(fq + gr)$

EXEMPEL 4.8 Om $p(x) = x^2 - x + 1$ så är $3 \cdot (x^2 - x + 1)$ en delare till $p(x)$, eftersom $p(x) = \frac{1}{3} \cdot (3 \cdot (x^2 - x + 1))$ $\square$

De delare som alla tal har gemensamt kallar vi för **triviala**. De triviala delarna till ett tal är talet självt och ± 1 . Triviala delare till ett polynom är dels alla tal utom 0 och dels alla produkter av ett tal (utom noll) och polynomet. Delare som inte är triviala kallas **äkta** delare.

En äkta delare till ett polynom har alltid lägre gradtal än polynomet. En äkta delare har grad minst ett, eftersom alla polynom av grad noll är konstanter och därmed triviala delare. En följd av detta är att förstgradspolynom saknar äkta delare, eftersom graden på delaren inte kan vara både mindre och större än ett.

Testproblem för avsnitt två

4. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska

- a) $x|p(x) \Rightarrow x|(x+1) \cdot p(x)$ b) $(x^2+1)|p(x) \Rightarrow (2x^2+2)|p(x)$
 c) $p(x)|q(x) \Rightarrow q(x)|p(x)$

$\diamond$

4.3 Polynomdivision

Innan du fick lära dig decimaltal i skolan fick du troligen lära dig division som inte gick jämnt ut.

EXEMPEL 4.9 $\frac{100}{33} = 3 + \frac{1}{33}$ eftersom $100 = 33 \cdot 3 + 1$. **Kvoten** är 3 och **resten** är 1 när 100 delas med 33. $\square$

Vi använder oss av samma terminologi när vi dividerar polynom.

EXEMPEL 4.10 $\frac{x^2 - 4x + 7}{x - 1} = x - 3 + \frac{4}{x - 1}$ eftersom $x^2 - 4x + 7 = (x - 1) \cdot (x - 3) + 4$. Kvoten är $x - 3$ och resten är 4. $\square$

EXEMPEL 4.11 $\frac{2x^2 + 5x - 1}{x + 1} = 2x + 3 + \frac{-4}{x + 1}$ eftersom $2x^2 + 5x - 1 = (x + 1) \cdot (2x + 3) - 4$. När vi dividerar två tal är resten alltid positiv, men här får vi alltså att kvoten $x - 3$ och resten -4 . $\square$

Om vi delar ett polynom $p(x)$ med $x - a$ och kallar kvoten för $q(x)$ får vi alltså

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$$

där r är resten, som är ett tal. Sätter vi nu $x = a$ får vi

$$p(a) = (a - a) \cdot q(a) + r$$

dvs. $p(a) = r$.

Det här är ett användbart resultat som vi därför formulerar som en sats.

SATS 4.2 RESTSATSEN

Om ett polynom $p(x)$ delas med $x - a$ så blir resten $p(a)$

EXEMPEL 4.12 Om $p(x) = 2x^2 + 5x - 1$ så är $p(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 1 = -4$.

I föregående exempel såg vi att divisionen $\frac{2x^2 + 5x - 1}{x + 1}$ ger resten -4 . Om vi använder oss av restsatsen behöver vi alltså inte ta reda på kvoten för att bestämma resten! $\square$

EXEMPEL 4.13 Polynomet $p(x) = x^2 - 1$ har ett nollställe $x = -1$. Vad blir resten när $p(x)$ delas av $x - (-1) = x + 1$? *Lösning:* $\frac{p(x)}{x + 1} = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = x - 1$.

Resten är 0. $\square$

Om $p(x)$ har ett nollställe $x = a$ får vi

$$p(a) = 0 \Rightarrow r = 0$$

Det innebär att om vi delar ett polynom $p(x)$ med $x - a$ och a är ett nollställe till $p(x)$ blir resten noll. Vi säger att $p(x)$ har en **faktor** $x - a$.

SATS 4.3 FAKTORSATSSEN

För polynomet $p(x)$ gäller att $p(a) = 0$ bara om $p(x)$ har faktorn $x - a$.

alternativ formulering:

För polynomet $p(x)$ gäller att $p(a) = 0$ bara om $x - a$ delar $p(x)$.

EXEMPEL 4.14 Visa att polynomet $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ är delbart med $x - 2$.

Lösning: $x - 2$ är en faktor om och endast om $p(2) = 0$. $p(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 6 = 0$, alltså är $x - 2$ en faktor. $\square$

Med hjälp av restsatsen kan vi nu bestämma resten när ett polynom divideras. Vi behöver även kunna bestämma kvoten. För att utföra polynomdivision använder vi oss av en uppställning (algoritm) som fungerar på samma sätt som när vi dividerar tal.

EXEMPEL 4.15 Utför divisionen $(x^3 - 4x^2 + x + 6)/(x - 2)$ *Lösning:* Vi ställer upp divisionen enligt nedan.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 2x - 3 \\
 \hline
 x^3 - 4x^2 + x + 6 \quad | \quad x - 2 \\
 - (x^3 - 2x^2) \\
 \hline
 -2x^2 + x + 6 \\
 - (-2x^2 + 4x) \\
 \hline
 -3x + 6 \\
 - (3x + 6) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Förklaring: Vi delar den första (dvs. den med högst gradtal) termen i täljaren endast med den term i nämnaren med högst gradtal (i vårt exempel x). Vi skriver kvoten i denna division högst upp och multiplicerar därefter hela nämnaren $(x - 2)$ med den erhållna kvoten. Den produkten subtraheras därefter från täljaren. Vi får ett nytt polynom $(x^3 - 2x^2)$ och vi upprepar samma procedur igen. När vi är klara har vi en rest, i detta fall 0, längst ned.

Vi visar nu steg för steg när vi multiplicerar kvoten med nämnaren. Jämför varje steg med stegen i divisionsalgoritmen!

$$\begin{aligned}
 (x^2 - 2x - 3) \cdot (x - 2) &= x^2(x - 2) - 2x(x - 2) - 3(x - 2) = \\
 &= (x^3 - 2x^2) + (-2x^2 + 4x) + (-3x + 6) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = \text{täljaren}
 \end{aligned}$$

□

Testproblem för avsnitt tre

5. Visa att polynomet $x^5 - x^4 - 5x^2 + 5x$ har en faktor $x - 1$
6. a) Bestäm utan division resten då $3x^2 + 8x - 6$ delas av $x + 3$
b) Bestäm kvoten.
7. Dividera polynomet $p(x)$ med $x - 1$ och ange rest och kvot
a) $p(x) = x^3 - x^2 - 5x + 5$ b) $p(x) = 4x^3 + x^2 - 1$
8. Dividera $p(z) = z^3 + iz + i$ med $z - i$.

◇

4.4 Polynomekvationer

Andragradsekvationer löser vi enkelt med en formel. Om p och q är komplexa konstanter så har $x^2 + px + q = 0$ lösningarna:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Det finns formler även för tredje- och fjärdegradsekvationerna, men dessa är så pass komplicerade att man brukar överlåta till datorer eller miniräknare att använda dem. I det här avsnittet ska vi lära oss en del användbara verktyg för att lösa polynomekvationer, dvs. ekvationer av typen $p(x) = 0$.

En viktig fråga att starta med är om det existerar lösningar till alla polynomekvationer. Den besvarades 1799 av den tyske matematikern *Gauss*, som då var den förste som bevisade en mycket viktig sats, *Algebrans fundamentalsats*.

SATS 4.4 ALGEBRANS FUNDAMENTALSATS

Varje reellt eller komplext polynom, av grad minst ett, har minst ett komplext nollställe.

Faktorisering av ett polynom innebär att vi skriver om polynomet som en produkt av förstgradspolynom.

EXEMPEL 4.16 Faktorisera $p(x) = x^2 - 2x - 3$ *Lösning:* Vi bestämmer först nollställena till $p(x)$, dvs. vi löser ekvationen $p(x) = 0$.

$$x = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-3)} = 1 \pm 2$$

Polynomet har nollställena 3 och -1 , alltså har $p(x)$ precis faktorerna $x - 3$ och $x + 1$, dvs. $p(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$. $\square$

EXEMPEL 4.17 Faktorisera $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ *Lösning:* Vi bryter ut 2, så att koefficienten framför kvadrattermen är 1: $2x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 - 2x - 3)$. Polynomet innanför parentesen känner vi igen från föregående exempel, och vi kan använda det resultatet. *Svar:* $f(x) = 2(x - 3)(x + 1) = (2x - 6)(x + 1)$. $\square$

Observera att de två olika polynomen har samma nollställen. Polynom med samma nollställen kallas för **associerade**.

När vi löste binomiska ekvationer ($z^n = z_0$) i kapitel ett upptäckte vi att antalet rötter var lika många som polynoms grad. Det gäller faktiskt för alla polynomekvationer, om vi tillåter att rötterna är komplexa. Vi får dock se upp, ibland dyker samma rot upp flera gånger. Vi kan få t.ex. dubbelrötter eller trippelrötter. En rots **multiplicitet** anger hur många gånger den förekommer (en dubbelrot har alltså multiplicitet två).

EXEMPEL 4.18 Lös ekvationen $x^2 - 6x + 9 = 0$ *Lösning:* Vi ser att vi kan faktorisera högerledet genom att använda andra kvadreringsregeln. $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$. Andragradsekvationen $(x - 3)^2 = 0$ har en dubbelrot $x = 3$. $\square$

Fundamentalsatsen kombinerad med faktorsatsen ger oss en viktig sats.

SATS 4.5

En polynomekvation $p(x) = 0$, där $p(x)$ är ett polynom av grad n , har precis n stycken komplexa rötter, om dessa räknas så många gånger som deras multiplicitet anger.

Nu kan vi alltså ta reda på hur många rötter en polynomekvation har, men vi har fortfarande inga ordentliga verktyg för att beräkna rötterna.

Testproblem för avsnitt fyra

9. Faktorisera $p(x) = x^2 - x - 2$
10. Lös ekvationerna och ange rötternas multiplicitet:

a) $3x^2 - 2 = 0$	b) $3 + 2x^2 = 0$
c) $2x^2 + 3x = 9$	d) $16x^2 + 9 = 24x$

$\diamond$

4.5 Ekvationslösning

I det här avsnittet visar vi att det finns relativt enkla metoder för att lösa ett stort antal polynomekvationer av grad större än två genom att reducera dem till första- eller andragradsekvationer.

EXEMPEL 4.19 Lös ekvationen $2(x - 1)(x + 2)(1 - x) = 0$ *Lösning:* VL är noll om någon av de tre faktorerna är noll. *Svar:* Ekvationens rötter är $x = 1$ (dubbelrot) och $x = -2$ $\square$

EXEMPEL 4.20 Lös ekvationen $x^3 - x = 0$ *Lösning:* Vi faktorerar VL genom att först bryta ut x och därefter använda konjugatregeln: $x^3 - x = 0 = x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)$ Ekvationens nollställen hittar vi genom att bestämma nollställen för respektive faktor. *Svar:* Ekvationens rötter är $x = 0$, $x = 1$ och $x = -1$. $\square$

EXEMPEL 4.21 Lös ekvationen $x^4 - x^2 - 2 = 0$ *Lösning:* Sätt $t = x^2$. Vi får då ekvationen $t^2 - t - 2 = 0$ med rötterna $t_1 = 2$ och $t_2 = -1$. Vilket ger följande möjliga värden på x : $\pm i$ och $\pm\sqrt{2}$. Den här metoden fungerar när alla förekommande exponenter har en gemensam äkta delare (i vårt exempel är både 4 och 2 jämna). $\square$

En metod som fungerar för polynomekvationer av vilken grad som helst, om det finns minst en relativt "enkel" heltalsrot, är att gissa en rot. Därefter reducerar vi polynomet till ett med en grad lägre. För att göra det sistnämnda måste vi utföra en polynomdivision. Men vilka heltal ska vi gissa på?

Vi studerar en allmän polynomekvation med endast heltalskoefficienter:

$$0 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

Antag att det finns en heltalsrot $x = p$. Då får vi, genom att sätta in $x = p$ i ekvationen, att

$$0 = a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_{n-1}p^{n-1} + a_np^n$$

Vi subtraherar konstanttermen från båda leden och bryter ut p i högerledet:

$$-a_0 = p \cdot (a_1 + a_2p + \dots + a_{n-1}p^{n-2} + a_np^{n-1})$$

Vi har nu att ett heltal är lika med en produkt av två heltal (högerledet). Alltså måste p vara en faktor till a_0 , dvs. p måste dela a_0 .

SATS 4.6

Om en polynomekvation med endast heltalskoefficienter har en heltalsrot så delar den polynomets konstantterm.

När vi gissar en heltalsrot ska vi alltså söka bland heltal som är faktorer till konstanttermen.

EXEMPEL 4.22 Lös ekvationen $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ genom att gissa en rot. *Lösning:*

Vi söker en rot bland möjliga heltalsfaktorer till ekvationens konstanta term, 6. Tänkbara heltalsrötter till denna ekvation blir då

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3 \text{ och } \pm 6$$

Vi provar genom att sätta in värdena i ekvationen och studera varje led för sig (vi vet ju inte om likhet gäller!).

$$x = 1 \Rightarrow VL = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$$

Då $VL = HL$ är $x = 1$ en rot till ekvationen. Vi vet då att

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1) \cdot q(x),$$

och vi kan bestämma $q(x)$ genom att utföra en polynomdivision:

$$\begin{array}{r} x^2 - x - 6 \\ x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \quad |x - 1| \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ -x^2 - 5x + 6 \\ \underline{-(-x^2 + x)} \\ -6x + 6 \\ \underline{-(6x + 6)} \\ 0 \end{array}$$

Vi får att

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1) \cdot (x^2 - x - 6) = 0$$

Vi löser ekvationen genom att hitta nollställan till respektive faktor, dvs. vi löser ekvationerna $(x - 1) = 0$ och $(x^2 - x - 6) = 0$. *Svar:* Ekvationen har rötterna 1, -2 och 3. $\square$

EXEMPEL 4.23 Gissa en heltalsrot till ekvationen $6x^3 - 41x^2 - 9x + 14$ och lös därefter ekvationen fullständigt. *Lösning:* Vi söker rötter bland heltalsfaktorer till 14, dvs., $\pm 1, \pm 2, \pm 7$ och ± 14 . Prövning genom insättning ger att $x = 7$ är en rot. Vi utför polynomdivisionen

$$\frac{6x^3 - 41x^2 - 9x + 14}{x - 7} = 6x^2 + x - 2$$

$$\Leftrightarrow 6x^3 - 41x^2 - 9x + 14 = (x - 7) \cdot (6x^2 + x - 2).$$

Vi finner rötterna genom att lösa ekvationerna $x - 7 = 0$ och $6x^2 + x - 2 = 0$.

Svar: Rötterna är 7, $1/2$ och $-2/3$. □

Det finns ett relativt enkelt sätt att kontrollera rötterna till en polynomekvation. I skolan fick du kanske lära dig att det finns samband mellan en andragradsekvations rötter och dess koefficienter. Finns något motsvarande för ekvationer av högre grad? Vi studerar ett allmänt tredjegradspolynom $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Vi börjar med att bryta ut koefficienten framför kubiktermen:

$$p(x) = a \left(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \right) = a \cdot \left(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \right) = a \cdot h(x)$$

Vi kan konstatera att polynomet som står innanför parentesen (vi har kallat det för $h(x)$) har samma nollställen som $p(x)$. En tredjegrads ekvation har tre rötter, vi kallar dem för r_1 , r_2 och r_3 . Nu faktorerar vi $h(x)$ och multiplicerar faktorerna:

$$h(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) = (x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2) \cdot (x - r_3) = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3)x - r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$$

Om vi jämför de två uttrycken av $h(x)$ ser vi dels att

$$\frac{d}{a} = -r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$$

dvs. konstanttermen är lika med produkten av rötterna med omvänt tecken och dels att

$$\frac{c}{a} = -(r_1 + r_2 + r_3)$$

dvs. koefficienten framför x^2 är summan av rötterna med omvänd tecken.

Vi kan studera sambanden mellan rötter och koefficienter för polynom med grad större än tre på motsvarande sätt. Om koefficienten framför högstgradstermen är lika med ett, gäller att koefficienten framför termen med näst högst gradtal är rötternas summa med omvänt tecken. Om polynomekvationen har jämnt gradtal är konstanttermen lika med produkten av rötterna, om gradtalet är udda så konstanttermen är lika med produkten av rötterna med omvänt tecken.

EXEMPEL 4.24 Kontrollera att tredjegradsekvationen $4x^3 - x^2 - 12x + 3 = 0$ har rötterna $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ och $1/4$. *Lösning:* Vi bryter först ut fyran så att vi får en etta framför tredjegradstermen

$$4(x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 3x + \frac{3}{4}) = 0$$

Rötternas produkt med omvänt tecken: $-(\sqrt{3} \cdot -\sqrt{3} \cdot \frac{1}{4}) = \frac{3}{4} =$ konstanttermen!

Rötternas summa med omvänt tecken: $-(\sqrt{3} + -\sqrt{3} + \frac{1}{4}) = -\frac{1}{4} =$ koefficienten framför x^2 ! $\square$

Av Lösformeln för $z^2 + pz + q = 0$, dvs

$$z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

kan man inse, att om $\frac{p^2}{4} - q < 0$, så är den ena roten konjugatet av den andra. Det gäller allmänt för alla polynomekvationer med reella koefficienter, att om en rot är komplex, så är även dess konjugat en rot till ekvationen.

EXEMPEL 4.25 Lös ekvationen $z^2 - 6z + 25 = 0$ *Lösning:* Ekvationens rötter kan bestämmas med formeln för andragradsekvationens rötter och är

$$z = 3 + 4i \quad \text{och} \quad \bar{z} = 3 - 4i.$$

Observera att rötterna i exemplet ovan är varandras konjugat! På grund av faktorsatsen vet vi då också att

$$(z - (3 + 4i))(z - (3 - 4i)) = z^2 - 6z + 25$$

dvs. vi återfår vänsterledet i ekvationen. Man kan här lägga märke till att andragradspolynomet har reella koefficienter, medan de två förstegradspolynomen innehåller komplexa termer. $\square$

EXEMPEL 4.26 Ekvationen $z^4 - 3z^3 + 2z^2 + z + 5 = 0$ har en rot $z = 2 + i$. Lös ekvationen fullständigt. *Lösning:* Enligt faktorsatsen är $z - (2 + i) = z - 2 - i$ en faktor till polynomet. Eftersom polynomet i högerledet endast har reella koefficienter, så är även $\bar{z} = \overline{2 + i} = 2 - i$ en rot till ekvationen och $z - (2 - i) = z - 2 + i$ en faktor till polynomet. Vi slår ihop dessa två faktorer till en gemensam faktor

$$(z - 2 - i)(z - 2 + i) = (z - 2)^2 - i^2 = z^2 - 4z + 4 - (-1) = z^2 - 4z + 5.$$

Vi genomför polynomdivisionen

$$\begin{array}{r}
 z^2 + z + 1 \\
 \hline
 z^4 - 3z^3 + 2z^2 + z + 5 \quad \boxed{z^2 - 4z + 5} \\
 -(z^4 - 4z^3 + 5z^2) \\
 \hline
 z^3 - 3z^2 + z + 5 \\
 -(z^3 - 4z^2 + 5z) \\
 \hline
 z^2 - 4z + 5 \\
 -(z^2 - 4z + 5) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

De återstående två rötterna får vi från faktorerna i kvotpolynomet.

$$\begin{aligned}
 z^2 + z + 1 &= 0 \\
 z &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \\
 z &= -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

Fjärdegradsekvationen har därmed de fyra rötterna

$$z = 2 \pm i \quad z = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

□

Testproblem för avsnitt fem

11. Lös ekvationen $(2x - 1)(x + 1)(x - 7)(2 - x) = 0$.

12. Lös ekvationerna

a) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

b) $(x + 2)^4 - (x + 2)^2 = 0$

13. Lös ekvationen genom att först gissa en rot

a) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$

b) $6x^3 - 11x^2 - 24x + 9 = 0$

14. Ekvationen $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 6x - 15 = 0$ har en rot $z = 2i + 1$. Bestäm de övriga rötterna.

◇

4.6 Euklides algoritm

Vi ska nu studera ett verktyg för att avgöra om två polynom har gemensamma nollställen.

Låt $f(x)$ vara ett polynom med grad n och $g(x)$ ett polynom av grad m . Vi skriver upp dem faktorerade i förstgradsfaktorer:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n-1})(x - a_n) \\ g(x) &= (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_{m-1})(x - b_m) \end{aligned}$$

Vi ser direkt att $f(x)$ har nollställena $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ och a_n och $g(x)$ har nollställena $b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$ och b_m . Om något eller några nollställen är lika innebär det att $f(x)$ och $g(x)$ har en gemensam delare.

EXEMPEL 4.27 Låt $f(x) = (x-1)(x-2)(x+1)(x+2)$ och $g(x) = (x-1)(x-2)(x+7)$. Vi ser att $f(x)$ och $g(x)$ har de gemensamma nollställena 1 och 2. Därmed är både f och g delbara med polynomen $x-1$, $x-2$ och $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$. Det sistnämnda av dessa polynom är en **största gemensam delare (SGD)** till $f(x)$ och $g(x)$ $\square$

Med en största gemensam delare till två polynom f och g menar vi ett polynom som delar både f och g och som är delbart av alla andra gemensamma delare till f och g . Den största gemensamma delaren är alltså det polynom som är en produkt av alla f och g 's gemensamma förstgradsdelare. Med "största" avser vi de delare med störst gradtal.

Det innebär att om vi vill finna gemensamma nollställen till två polynom söker vi först efter en största gemensam delare. Om den är ett polynom med grad större än 0 är de gemensamma nollställena samma som SGD:s nollställen.

Vi använder oss av en algoritm som kallas **Euklides** algoritm i jakten på en SGD till två polynom. Den fungerar på samma sätt som när vi söker efter den största gemensamma delaren till två naturliga tal. Vi tittar därför först på ett exempel med tal.

EXEMPEL 4.28 Bestäm en största gemensam delare till 91 och 78. *Lösning:* Vi söker SGD(91, 78). Vi vet att varje delare till 91 och 78 också är en delare till $91 - 78 = 13$. Därmed måste *alla* gemensamma delare till 91 och 78 vara samma som de gemensamma delarna till 13 och 78. Särskilt gäller att

$$\text{SGD}(91, 78) = \text{SGD}(91 - 78, 78) = \text{SGD}(13, 78).$$

Vi kan fortsätta processen genom att subtrahera sex 13 från 78

$$\text{SGD}(13, 78) = \text{SGD}(13, 78 - 6 \cdot 13) = \text{SGD}(13, 0).$$

Eftersom $\text{SGD}(13, 0) = 13$ så är $\text{SGD}(91, 78) = 13$. $\square$

Vi använder nu samma algoritm för att bestämma en största gemensam delare till två polynom.

Euklides algoritm:

Givet två polynom, f och g där $\deg f \geq \deg g$

- (1) Dela $f(x)$ med $g(x)$. Bestäm kvoten $q_1(x)$ och resten $r_1(x)$
- (2) Dela $g(x)$ med $r_1(x)$. Bestäm kvoten $q_2(x)$ och resten, $r_2(x)$.
- (3) Dela $r_1(x)$ med $r_2(x)$. Bestäm kvoten $q_3(x)$ och resten, $r_3(x)$.

Fortsätt tills vi får en rest $= 0$. Den sista icke-försvinnande resten är den största gemensamma delaren!

Uppställningen ser ut så här:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= q_1(x) \cdot g(x) + r_1(x) \\
 g(x) &= q_2(x) \cdot r_1(x) + r_2(x) \\
 r_1(x) &= q_3(x) \cdot r_2(x) + r_3(x) \\
 &\vdots \\
 r_{n-3}(x) &= q_{n-1}(x) \cdot r_{n-2}(x) + r_{n-1}(x) \\
 r_{n-2}(x) &= q_n(x) \cdot r_{n-1}(x) + 0 \\
 \text{SGD} &= r_{n-1}(x)
 \end{aligned}$$

Algoritmen bygger på att

$$\text{SGD}(f, g) = \text{SGD}(f - g \cdot q_1, g) = \text{SGD}(g - q_1 \cdot r_1, r_1) = \dots = \text{SGD}(r_{n-1}, 0) = r_{n-1}.$$

EXEMPEL 4.29 Bestäm en största gemensam delare till $f(x) = x^4 - 11x^2 + 18x - 8$ och $g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Bestäm därefter eventuella gemensamma nollställen

Lösning: Vi följer Euklides algoritm och börjar med att utföra divisionen

$$\frac{x^4 - 11x^2 + 18x - 8}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = x + 6 + \frac{14x^2 - 42x + 28}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = (x + 6) \cdot g(x) + 14x^2 - 42x + 28$$

Vi går vidare till steg 2 i Euklides algoritm och bestämmer kvoten

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{14x^2 - 42x + 28} = \frac{x}{14} - \frac{3}{14} \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \left(\frac{x}{14} - \frac{3}{14}\right) \cdot (14x^2 - 42x + 28) + 0$$

Den sista icke-försvinnande resten är $14x^2 - 42x + 28$. Alltså är $\text{SGD}(f, g) = 14x^2 - 42x + 28$ eller $x^2 - 3x + 2$, som är ett associerat polynom (ett polynom med samma nollställen). Vi kan fritt ersätta polynomen f, g, r_1, r_2 , osv. mot associerade polynom för att förenkla räkningarna.

De gemensamma nollställena är då nollställena till $\text{SGD} = x^2 - 3x + 2$, dvs. 1 och 2. $\square$

Om SGD till två polynom är en konstant säger vi att polynomen är **relativt prima**.

Om vi vill förkorta en kvot av två polynom så långt som möjligt är det ofta mycket praktiskt att finna en största gemensam delaren till de två polynomen (jämför med hur du gör när du förkortar ett bråk!).

EXEMPEL 4.30 Förkorta uttrycket $\frac{x^4 - 11x^2 + 18x - 8}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$ så långt som möjligt. *Lösning:*

Vi vet från föregående exempel att en SGD till nämnaren och täljaren är $x^2 - 3x + 2$. Vi delar nämnaren och täljaren var för sig med SGD:

$$\frac{x^4 - 11x^2 + 18x - 8}{(x^2 - 3x + 2)} = x^2 + 3x - 4$$

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2} = x - 3$$

Vi ställer upp kvotuttrycket igen och förkortar:

$$\frac{x^4 - 11x^2 + 18x - 8}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{(x^2 - 3x + 2) \cdot (x^2 + 3x - 4)}{(x^2 - 3x + 2) \cdot (x - 3)} = \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 3}$$

$\square$

Testproblem för avsnitt sex

15. Bestäm en största gemensam delare till $4x^5 - 4x^4 - 25x^3 - 5x^2 + 21x + 9$ och $x^4 - 10x^2 + 9$.
16. Bestäm gemensamma nollställen till polynomen $x^4 - 2x^2 - 3$ och $x^3 - 3x^2 + x - 3$.

17. Förkorta uttrycket $\frac{x^5 + 3x^4 + x^3 - 5x^2 - 6x - 2}{x^4 - x^2 - 2}$ så långt som möjligt.

◇

ÖVNINGAR TILL KAPITEL 4

- 4.1. Ange graden av $p(x)$ då $p(x) =$

a) $x^3 - 7x^2 + 2x$

b) $1 + x^3 - (1 + x^3)$

c) $(x + 2)(2 + x^2)$

d) $(1 - x^2)(1 + x^2) + (1 + x^2)^2$

- 4.2. Låt p och q vara polynom av grad 5. Vad kan sägas om gradtalet till polynomet $p + q$? Måste $p + q$ vara av grad 5?

- 4.3. Produkten $p \cdot q$ av polynomen p och q har grad 12. Vilket gradtal har p om q har grad 4?

- 4.4. Polynomet p är av grad 3 och polynomet q är en äkta delare till p . Vilka gradtal är möjliga för q ?

- 4.5. $p(x) = 3x^2 - 9x$. Vilka av följande polynom är äkta delare till p ?

$q_1(x) = x - 3$

$q_2(x) = x$

$q_3(x) = x^2 - 3x$

$q_4(x) = 6x$

$q_5(x) = 2x - 6$

$q_6(x) = 3$

- 4.6. Bestäm alla äkta delare till $x^2 - 25$

- 4.7. Undersök alla äkta delare till $p(x) = x^3 - 16x$. Ange alla äkta delare av

a) grad 1

b) grad 2

- 4.8. Använd faktorsatsen för att avgöra om polynomet $p(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ är delbart med

a) $x - 1$

b) $x + 1$

c) $x - 3$

- 4.9. a) Beskriv hur man kan använda faktorsatsen för att avgöra om ett polynom är delbart med $x^2 - 4$
b) Vilka av följande polynom är delbara med $x^2 - 4$?

$2x^3 - 4x$

$x^4 - 3x^2 - 4$

$x^3 + 2x^2 + x + 2$

$x^3 + x^2 - 4x - 4$

- 4.10. Bestäm konstanten a så att $x - 2$ blir delare till $x^3 - 2x^2 + ax - 9$

4.11. För vilka naturliga tal k gäller att polynomet $x^{2k} + x^k - 2$ är delbart med

a) $x - 1$

b) $x + 1$?

4.12. Bestäm resten vid följande division: $\frac{z^5 + (i + 1)z^2 - z + 1}{z + i}$.

4.13. Utför divisionen och ange kvot och rest

a) $\frac{x^2 - 3x + 7}{x - 2}$

b) $\frac{x^4}{x^2 - 1}$

c) $\frac{x^4 + x}{x^4 - 1}$

d) $\frac{2x^3 + 3x^2 - 7x + 4}{x^2 + 2x - 3}$

e) $\frac{x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6}{x^2 + 4x + 3}$

4.14. Polynomet $z^3 + z + 10$ har bland andra nollställena -2 och $1 + 2i$. Bestäm det tredje nollstället.

4.15. Ekvationen $2z^3 + 2z^2 + z + 10 = 0$ har en rot $z = \frac{1}{2}(1 + 3i)$. Beräkna ekvationens övriga rötter.

4.16. Faktorisera polynomen till en produkt av förstgradspolynom

a) $x^4 - 5x^2 + 4$

b) $-7x^3 + 35x^2 - 42x$

c) $4x^4 + 15x^2 - 4$

4.17. Polynomet $x^3 + 2x^2 - 2x + 4$ har ett heltalsnollställe. Bestäm samtliga nollställena.

4.18. Ekvationen $z^4 + 6z^3 + 13z^2 + 18z + 30 = 0$ har en rot som är rent imaginär. Lös ekvationen fullständigt.

4.19. Om ekvationen $z^4 - 2z^3 - 7z^2 + 26z - 20 = 0$ vet man att den har roten $2 + i$. Bestäm samtliga rötter.

4.20. Bestäm den största gemensamma delaren till $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ och $x^3 - 1$.

4.21. Ekvationerna $x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 26x - 24 = 0$ och $x^3 - 10x^2 + 29x - 20 = 0$ har minst en gemensam rot. Lös ekvationerna.