

1. Utför följande divisioner, och ange kvot och rest:

- a) Dividera $x^3 + x^2 - 8x + 1$ med $x - 2$.
- b) Dividera $x^4 - x^3 - x + 6$ med $x^2 - x + 2$.
- c) Dividera $x^3 - 4x - 15$ med $x - 3$.

2. Använd faktorsatsen för att visa att

- a) $x^3 - 2x - 4$ är delbar med $x - 2$,
- b) $x^5 + 3x - 2x^2 - 2x + 4 = 0$ är delbar med $x + 1$.

3. Faktorisera så långt som möjligt i reella faktorer.

- a) $81x^4 - 1$
- b) $x^4 - x^2 - 6$
- c) $x^4 + 1$

4. Bestäm ett andragradspolynom med reella koefficienter vars ena nollställe är $3 - 2i$.

5. Ekvationen $z^4 + 4z^3 + 14z^2 + 36z + 45 = 0$ har roten $z = i - 2$. Lös ekvationen, dvs finn samtliga rötter.

6. Lös ekvationerna:

- a) $2z + 2iz - 5i = 0$
- b) $z + i = iz + 3$

7. I denna uppgift får vi en metod att lösa andragradsekvationer med komplexa koefficienter. Dela först med den ledande koefficienten så att ekvationen kan skrivas $z^2 + cz + d = 0$, där c och d är komplexa tal. Sedan ska vi kvadratkomplettera, och då får vi en ekvation av typen $z^2 = w$, där w är ett komplext tal.

- a) Vi ska lösa ekvationen $z^2 = 3 - 4i$. Ansätt $z = a + bi$ där a och b är reella. Sätt in i ekvationen och identifiera realdelar och imaginärdelar. Realdelen av z^2 blir $a^2 - b^2$ som måste vara lika med 3 (realdelen av högerledet). Imaginärdelen av z^2 är $2ab$ som måste vara lika med -4 . Vi har alltså

$$a^2 - b^2 = 3 \text{ och } 2ab = -4.$$

Nu gäller det att försöka hitta de reella talen a och b .

b) Eftersom $|z|^2 = a^2 + b^2$ kan vi skriva

$$a^2 + b^2 = |z|^2 = |z| \cdot |z| = |z \cdot z| = |z^2| = |3 - 4i|.$$

Beräkna $a^2 + b^2$.

c) Använd att du vet vad $a^2 - b^2$ och $a^2 + b^2$ är för att bestämma a^2 och b^2 .

d) Bestäm de möjliga värdena på a och b .

e) Eftersom en andragradsekvation endast har två lösningar är endast två kombinationer av värdena av a och b rätt. Välj ut de två kombinationer som ger lösningarna till ekvationen. Ledning: Eftersom $2ab = -4$ så måste a och b ha olika tecken.

f) Nu kan du skriva ner de två lösningarna till $z^2 = 3 - 4i$.

8. Lös med metoden i föregående uppgift ekvationen $z^2 = -8 + 6i$.

9. Lös ekvationen $z^2 - 2iz - 4 + 4i = 0$.

Ledning: Kvadratkomplettera! Ekvationen kan skrivas $(z - i)^2 + 1 - 4 + 4i = 0$. Sätt $w = z - i$, då kan ekvationen skrivas $w^2 = \dots$. Bestäm w enligt uppgift 7, och bestäm därefter z .

SVAR

1. a) Kvot $x^2 + 3x - 2$, rest -3 . b) Kvot $x^2 - 2$, rest $-3x + 10$. c) Kvot $x^2 + 3x + 5$, rest 0 .

2. a) $f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 - 4 = 0$. b) $f(-1) = -1 - 3 - 2 + 2 + 4 = 0$.

3. a) $(9x^2 + 1)(3x + 1)(3x - 1)$. b) $(x^2 + 2)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$.
c) $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$.

4. T. ex. $(x^2 - 6x + 13)$.

5. $-2 \pm i$ och $\pm 3i$.

6. a) $z = \frac{5}{4}(1 + i)$. b) $z = 2 + i$.

7. b) $a^2 + b^2 = 5$. c) $a^2 = 4$, $b^2 = 1$. e) $(a = 2, b = -1)$ eller $(a = -2, b = 1)$. f) $z = 2 - i$ eller $z = -2 + i$.

8. $z = 1 + 3i$ eller $z = -1 - 3i$.

9. $z = 2$ eller $z = -2 + 2i$.