

Övningar på talföljder och induktionsbevis

I samtliga uppgifter skall man använda ett induktionsbevis för att visa att den givna slutna formeln verkligen är en sluten formel för den rekursivt definierade talföljden.

1. Rekursiv definition: $a_0 = 5$, $a_{n+1} = a_n + 7$.

Sluten formel: $a_n = 5 + 7n$.

2. Rekursiv definition: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$.

Sluten formel: $a_n = 2^n - 1$.

3. Rekursiv definition: $a_0 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n - 1$.

Sluten formel: $a_n = 2^n + 1$.

4. Rekursiv definition: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$.

Sluten formel: $a_n = 2^{n+1} - 1$.

5. Rekursiv definition: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 4a_n + 1$.

Sluten formel:

$$a_n = \frac{4^n - 1}{3}.$$

6. Rekursiv definition: $a_0 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 2$.

Sluten formel: $a_n = 3^{n+1} - 1$.

7. Antag att $c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 1$ och att $a_0 \in \mathbb{Z}$ är "startvärdet" för en rekursivt definierad talföljd enligt: $a_{n+1} = c \cdot a_n + d$. Visa med induktion att följande är en sluten formel för talföljden:

$$a_n = a_0 \cdot c^n + d \cdot \frac{1 - c^n}{1 - c}.$$

(De slutna formlerna i fallen 2-6 har jag fått fram på detta sätt, och sedan förenklat.)