UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Inger Sigstam, tel: 471 3223

Tentamen
BASKURS I MATEMATIK
2008-09-26

Skrivtid: 8-13. Inga hjälpmedel tillåtna. Maxpoäng på varje uppgift anges inom parentes. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. För betyg 3 (eller 4 resp. 5) krävs minst 18 (eller 25 resp. 32) poäng. Om du är godkänd på duggan, ska du inte lämna in uppgift 1.

1. Ordet TITTADE skrivs på ett papper, som sedan klipps i sju bitar så att det blir en bokstav på varje bit.
   a) Hur många olika "ord" kan bildas om alla sju bitar läggs i en rad?
   b) Hur många olika "ord" kan bildas om endast 4 av de sju bitarna skall läggas i en rad? (5)

2. a) Beräkna avståndet mellan punkterna $(1, -2)$ och $(-1, 1)$, samt ange ekvationen för linjen genom dessa punkter.
   b) Bestäm alla skärningspunkter mellan kurvorna $x^2 + y^2 = 3$ och $y = 3 - x^2$.
   c) Visa att ekvationen $4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$ beskriver en ellips samt ange dess form och läge i planet med en skiss. (6)

3. a) Förenkla uttrycket $3^{\log_2 16 - 2 + \log_3 2}$ till ett heltal.
   b) Lös ekvationen $\log_9(x + 2) = \log_3 x$. (5)

4. Visa med induktion att $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}$ för alla naturliga tal n. (5)

5. Lös olikheten $\displaystyle\left|\frac{2x+1}{3-x}\right| \leq 1$. (5)

6. a) Beräkna belopp och argument för det komplexa talet $z_0 = 3\sqrt{3} - 3i$.
   b) Bestäm alla lösningar i intervallet $-\pi < x \leq \pi$ till ekvationen $\cos 3x - 2 \sin x \cos 3x = 0$. (5)

7. Bestäm x^2-termen i utvecklingen av $\displaystyle\left(3x + \frac{1}{3x}\right)^{10}$. (4)

8. Ekvationen $z^4 - 2z^3 - z^2 + 2z + 10 = 0$ har en rot på formen $a + ai$ där a är ett reellt tal. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen. (5)

LYCKA TILL !

SVAR

1. a) $\dfrac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840.$

   b) Antal ord med exakt tre T: $\binom{4}{3} \cdot 4 = 16$. (Välj platser för de tre T:na, välj sedan den fjärde bokstaven.) Antal ord med exakt två T: $\binom{4}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 72$. Antal ord med högst ett T: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$. Totalt: $16 + 72 + 120 = 208$.
   SVAR: a) 840 ord. b) 208 ord.

2. a) Avståndet är $\sqrt{(1+1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{13}$. Linjens riktningskoefficient är $k = \dfrac{-2-1}{1--1} = -\dfrac{3}{2}$. Linjens ekvation är $y = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$, (eller $3x + 2y + 1 = 0$).
   b) Vi har $x^2 = 3 - y^2$ (på cirkeln) och $x^2 = 3 - y$ (på parabeln). För skärningspunkt måste gälla att $3 - y^2 = 3 - y$, dvs $y^2 - y = 0$. Alltså $y = 0$ eller $y = 1$. När $y = 0$ får vi $x^2 = 3$, så $x = \pm\sqrt{3}$. När $y = 1$ får vi $x^2 = 2$, så $x = \pm\sqrt{2}$. Skärningspunkterna blir: $(\sqrt{2}, 1),\ (-\sqrt{2}, 1),\ (\sqrt{3}, 0),\ (-\sqrt{3}, 0)$.
   c) Kvadratkomplettering ger $4(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, som kan skrivas $(x-1)^2 + \dfrac{(y-2)^2}{2^2} = 1$. Detta är ekvationen för en ellips med mittpunkten $(1, 2)$ och halvaxellängderna 1 (parallellt med x-axeln) och 2 (parallellt med y-axeln).

3. a) 18. b) Observera först att vi måste ha $x > 0$. Byt logaritmbas: $\log_9(x+2) = \dfrac{\log_3(x+2)}{\log_3 9}$. Ekvationen kan nu skrivas $\log_3(x+2) = 2\log_3 x$, dvs $\log_3(x+2) = \log_3 x^2$. För $x > 0$ är detta ekvivalent med att $x + 2 = x^2$. Denna ekvation har rötterna $x = 2$ och $x = -1$. Men -1 är en falsk rot, vi hade ju $x > 0$. **SVAR:** $x = 2$.

4. Bas: $VL_0 = 1$, och $HL_0 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2} = 1$, så påståendet stämmer för $n = 0$.
   Induktionsantagande (I.A.): $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{3^k} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^p}$, dvs. $VL_p = HL_p$ för något heltal $p \geq 0$.
   Induktionssteg: Vi måste visa att $VL_{p+1} = HL_{p+1}$. Vi har

$$\begin{aligned}
VL_{p+1} &= \sum_{k=0}^{p+1} \frac{1}{3^k} = VL_p + \frac{1}{3^{p+1}} \\
&= [\textit{enligt I.A.}] = HL_p + \frac{1}{3^{p+1}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^p} + \frac{1}{3^{p+1}} \\
&= \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2 \cdot 3^p} - \frac{1}{3^{p+1}} \right) = \frac{3}{2} - \frac{3-2}{2 \cdot 3^{p+1}} = HL_{p+1}.
\end{aligned}$$

   Enligt induktionsaxiomet följer nu att påståendet är sant för alla heltal $n \geq 0$.

5. Olikheten är ekvivalent med $-1 < \dfrac{2x+1}{3-x} < 1$. Vi söker alla x som uppfyller både (1): $-1 \leq \dfrac{2x+1}{3-x}$, och (2): $\dfrac{2x+1}{3-x} \leq 1$. Vi löser (1). Sätt allt på ena sidan, faktorisera och teckenstudera: (1) är ekvivalent med $0 \leq \dfrac{3-x+2x+1}{3-x}$, dvs med $0 \leq \dfrac{x+4}{3-x}$.

Intressanta punkter att ha med i teckenstudietabellen (punkter där tecknet kan ändras): $x = -4$ och $x = 3$.

x		-4		3	
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\dfrac{x+4}{3-x}$	$-$	0	$+$	odef	$-$

Vi ser att (1) gäller om och endast om $-4 \leq x < 3$. På samma sätt finner man att (2) är ekvivalent med att $x \leq \frac{2}{3}$ eller $x > 3$. Vi söker alla x som gör både (1) och (2) sanna. Det är alla x så att $-4 \leq x \leq \frac{2}{3}$. **SVAR:** $-4 \leq x \leq \frac{2}{3}$.

6. a) Beloppet är 6, och principalargumentet är $-\frac{\pi}{6}$.

   b) $\pm\frac{5\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{6}$.

7. x^2-termen är $\binom{10}{6} \cdot 9x^2 = 1890x^2$.

8. Ekvationen har endast reella koefficienter, så även $a - ai$ är en rot. Insättning av $a + ai$ och förenkling ger

$$-4a^4 + 4a^3 + 2a + 10 + i(-4a^3 - 2a^2 + 2a) = 0.$$

Im-delen är 0 om och endast om $a \in \{0, \frac{1}{2}, -1\}$. Av dessa är det endast $a = -1$ som även gör realdelen 0. Alltså är $a = -1$ och vi vet enligt ovan att två av rötterna är $-1-i$ och $-1+i$. Med faktorsatsen får vi nu två faktorer vars produkt blir z^2+2z+2. Polynomdivision ger $f(z) = (z^2 + 2z + 2)(z^2 - 4z + 5)$. De två kvarvarande rötterna blir då $z_{3,4} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$. **SVAR:** Rötterna är $-1 \pm i$ och $2 \pm i$.