

Skriftid: 8-13. Tillåtna hjälpmedel: Inga, annat än pennor, radergum och papper (det sista tillhandahålles). *Poängsättning:* Varje (a)-del ger maximalt 3 poäng; varje (b)-del ger maximalt 3 poäng. *Betygsgränser:* För betyg 3 krävs minst 2 poäng på *varje* (a)-del; för betyg 4 skall kravet för betyg 3 ha uppnåtts och den sammanlagda poängen skall vara minst 26; för betyg 5 skall kravet för betyg 3 ha uppnåtts och den sammanlagda poängen skall vara minst 36.

Lösningarna skall innehålla relevanta förklaringar och uträkningar.

1. (a) En talföljd definieras rekursivt genom $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 2$. Formulera vad som skall visas i basfallet och i induktionssteget i ett induktionsbevis av påståendet att $a_n = 2 \cdot 3^n - 1$ är en sluten formel för talföljden. (Om du tycker att det praktiska utförandet är enklare än själva formuleringen av vad man gör, så gör först (b)-delen och beskriv sedan vad du visade i basfallet och induktionssteget.)

(b) Genomför induktionsbeviset som nämns i (a)-delen.

2. (a) Hur många sju-siffriga tal finns det där exakt fyra av siffrorna är ettor och resten är nollor? (Tänk på ettornas placering.)

(b) Hur många sju-siffriga tal finns det där exakt fyra av siffrorna är ettor (men vi släpper nu kravet att resten är nollor)?

3. (a) Beskriv mängden av reella tal x som löser olikheten $|2 - 5x| < 7$.

(b) Beskriv mängden av reella tal x som löser olikheten

$$\frac{x^2 - 2}{x} > 1$$

4. (a) Förenkla följande uttryck till ett heltal:

$$\log_3 (3^5 \cdot 9^{\log_4 16})$$

(b) Lös ekvationen

$$\log_4(3x^2 - x - 26) - \log_2(x - 1) = \frac{1}{2}$$

5. (a) Beräkna kvoten och resten då $x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 20$ divideras med $x^2 - x - 6$.

(b) Skriv $x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24$ som en produkt av polynom som har grad ett. Observera att polynomen i (a) och (b) är olika, men divisionen från (a)-delen är ändå till hjälp.

6. (a) Beräkna avståndet mellan punkterna $(-2, 4)$ och $(1, -3)$ samt ange ekvationen för cirkeln som passerar igenom $(-2, 4)$ och vars centrum är $(1, -3)$.

(b) Skissa kurvan som beskrivs av ekvationen $9x^2 + 36x + 4y^2 + 8y + 4 = 0$, och glöm inte att förklara hur du kom fram till din skiss.

7. (a) Lös ekvationen $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -1$.

(b) Lös ekvationen

$$\frac{\sin x}{2} + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

8. (a) Låt $z = \sqrt{3} - i$ och $w = -3 - 3i$. Beräkna zw och $\frac{z}{w}$ och ange produkten och kvoten på polär form.

(b) Lös ekvationen $z^2 - (2 - 2i)z + 6i = 0$. (Ledning: börja att kvadratkomplettera.)

Lycka till!