

Skrivtid: 9-14. Tillåtna hjälpmedel: Inga, annat än pennor, radergum och papper (det sista tillhandahålles). *Poängsättning:* Varje (a)-del ger maximalt 3 poäng; varje (b)-del ger maximalt 3 poäng. *Betygsgränser:* För betyg 3 krävs minst 2 poäng på *varje* (a)-del; för betyg 4 skall kravet för betyg 3 ha uppnåtts och den sammanlagda poängen skall vara minst 26; för betyg 5 skall kravet för betyg 3 ha uppnåtts och den sammanlagda poängen skall vara minst 36.

Lösningarna skall innehålla relevanta förklaringar och uträkningar.

1. (a) En talföljd definieras rekursivt genom $a_0 = 3$, $a_{n+1} = 4a_n - 3$. Formulera vad som skall visas i basfallet och i induktionssteget i ett induktionsbevis av påståendet att $a_n = 2^{2n+1} + 1$ är en sluten formel för talföljden. (Om du tycker att det praktiska utförandet är enklare än själva formuleringen av vad man gör, så gör först (b)-delen och beskriv sedan vad du visade i basfallet och induktionssteget.)

(b) Genomför induktionsbeviset som nämns i (a)-delen.

2. (a) Hur många sju-siffriga positiva heltal finns det där exakt två av siffrorna är ettor och resten av siffrorna är antingen tvåor eller treor.

(b) Hur många sju-siffriga positiva heltal finns det där exakt två av siffrorna är ettor och resten av siffrorna är antingen tvåor eller treor *och två ettor inte står intill varandra?*

3. (a) Beskriv mängden av reella tal x som löser olikheten $|x + 4| > 2$.

(b) Beskriv mängden av reella tal x som löser olikheten

$$\frac{x^2 - 1}{|x + 1|} > 1$$

4. (a) Förenkla följande uttryck till ett heltal:

$$2 \log_3 \left(\frac{\log_2 8}{9} \right)$$

(b) Lös ekvationen

$$25^{\frac{x}{2}} = 5^{\sqrt{2x+3}}$$

5. (a) Beräkna kvoten och resten då $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ divideras med $x^2 - 3x - 4$.

(b) Finn alla rötter till $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 2x - 8 = 0$. Observera att polynomen i (a) och (b) är olika, men divisionen från (a)-delen är ändå till hjälp.

6. (a) Ange ekvationen för linjen som passerar igenom punkterna $(1, 1)$ och $(0, -1)$ samt ekvationen för cirkeln som passerar igenom $(1, 1)$ och har sitt centrum i $(0, -1)$.

(b) Skissa kurvan som beskrivs av ekvationen $y = x^2 + 6x + 8$ och förklara också med ord hur den kan fås genom förskjutningar av kurvan $y = x^2$.

7. (a) Lös ekvationen $\cos\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) Lös ekvationen

$$4 \cos^2\left(\frac{x}{3}\right) - 2 \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) = 1$$

8. (a) Låt $z = 1 + i$ och $w = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. Beräkna z^4 och $\frac{z}{w}$ och ange talen på polär form.

(b) Lös ekvationen $z^4 = -4$.

Lycka till!