

Skriftid: 8-13. Tillåtna hjälpmedel: Inga, annat än pennor, radergum och papper (det sista tillhandahålles). *Poängsättning:* Varje (a)-del ger maximalt 3 poäng; varje (b)-del ger maximalt 3 poäng. *Betygsgränser:* För betyg 3 krävs minst 2 poäng på *varje* (a)-del; för betyg 4 skall kravet för betyg 3 ha uppnåtts och den sammanlagda poängen skall vara minst 26; för betyg 5 skall kravet för betyg 3 ha uppnåtts och den sammanlagda poängen skall vara minst 36.

Lösningarna skall innehålla relevanta förklaringar och uträkningar.

1. (a) En talföljd definieras rekursivt genom $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 2$. Formulera vad som skall visas i basfallet och i induktionssteget i ett induktionsbevis av påståendet att $a_n = 2 \cdot 3^n - 1$ är en sluten formel för talföljden. (Om du tycker att det praktiska utförandet är enklare än själva formuleringen av vad man gör, så gör först (b)-delen och beskriv sedan vad du visade i basfallet och induktionssteget.)

(b) Genomför induktionsbeviset som nämns i (a)-delen.

2. (a) Hur många sju­siffriga positiva heltal finns det där exakt fem av siffrorna är ettor och resten av siffrorna är antingen tvåor eller treor.

(b) Hur många sju­siffriga positiva heltal finns det där exakt fem av siffrorna är ettor och resten av siffrorna är antingen tvåor eller treor *och där ingen etta står intill någon tvåa*?

3. (a) Beskriv mängden av reella tal x som löser olikheten $|2 - 3x| > 1$.

(b) Beskriv mängden av reella tal x som löser olikheten

$$x < \frac{12}{x-1}.$$

4. (a) Förenkla följande uttryck till ett heltal:

$$3 \log_3 \left(\frac{1}{\log_3 27} \right)$$

(b) Lös ekvationen

$$\log_4(3x^2 + 3x - 10) - \frac{1}{2} = \log_2(x + 1).$$

5. (a) Beräkna kvoten och resten då $x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 36x + 25$ divideras med $x^2 - 4x + 4$.

(b) Finn alla rötter till $x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 36x + 20 = 0$. Observera att polynomen i (a) och (b) är olika, men divisionen från (a)-delen är ändå till hjälp.

6. (a) Beräkna avståndet mellan punkterna $(1, 2)$ och $(-1, -1)$ samt ange ekvationen för cirkeln som passerar igenom $(-1, -1)$ och har sitt centrum i $(1, 2)$.

(b) Skissa kurvan som beskrivs av ekvationen $x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$, och glöm inte att förklara hur du kom fram till din skiss.

7. (a) Lös ekvationen $\sin(2x) = -\frac{1}{2}$.

(b) Lös ekvationen $\sin^2(4x) = \cos^2(2x)$.

8. (a) Låt $z = 2 + 2i$ och $w = -\sqrt{2} \cdot i$. Beräkna zw och $\frac{z}{w}$ och ange talen på polär form.

(b) Lös ekvationen $z^2 + (2 + 4i)z - 3 - 2i = 0$. Ledning: börja med att kvadratkomplettera.

Lycka till!