

Skriftid: 14-19. Tillåtna hjälpmedel: Inga, annat än pennor, radergum och papper (det sista tillhandahålles). *Poängsättning:* Varje (a)-del ger maximalt 3 poäng; varje (b)-del ger maximalt 3 poäng. *Betygsgränser:* För betyg 3 krävs minst 21 poäng; för betyg 4 minst 30 poäng; för betyg 5 minst 39 poäng. **Lösningarna skall innehålla relevanta förklaringar och uträkningar.**

1. (a) En talföljd definieras rekursivt genom $a_0 = 2$, $a_{n+1} = 7a_n + 12$. Formulera vad som skall visas i basfallet och i induktionssteget i ett induktionsbevis av påståendet att $a_n = 4 \cdot 7^n - 2$ är en sluten formel för talföljden. (Om du tycker att det praktiska utförandet är enklare än själva formuleringen av vad man gör, så gör först (b)-delen och beskriv sedan vad du visade i basfallet och induktionssteget.)

(b) Genomför induktionsbeviset som nämns i (a)-delen.

2. (a) Hur många "ord" kan bildas genom att man flyttar om bokstäverna i *ENAHANDA* om man kräver att ordet slutar med *A*? (Ett exempel på ett sådant ord är *NADAEHNA*.)

(b) Hur många "ord" kan bildas genom att man flyttar om bokstäverna i *ENAHANDA* om man kräver att bokstaven *D* inte har ett *A* direkt till höger om sig.

3. (a) Beskriv mängden av reella tal x som löser olikheten $|2x - 10| \leq 6$.

(b) Beskriv mängden av reella tal x som löser olikheten

$$\frac{x^2 - 4}{x} > 2x.$$

4. (a) Förenkla följande uttryck till ett heltal:

$$\log_7 \left(7^{\log_{10} 5} \cdot 7^{\log_{10} 20} \right).$$

(b) Lös ekvationen

$$2^{(x^2)} = 4^{(x+4)}.$$

5. (a) Beräkna kvoten och resten då $x^4 - 9x^3 + 24x^2 + x - 35$ divideras med $x^2 - 6x + 10$.

(b) Finn alla rötter till $x^4 - 9x^3 + 24x^2 - 6x - 40 = 0$. Observera att polynomen i (a) och (b) är olika, men divisionen från (a)-delen är ändå till hjälp.

6. (a) En cirkel har sitt centrum i punkten $(1, 2)$ och passerar igenom punkten $(-1, -1)$. Bestäm cirkelns radie samt dess ekvation.

(b) Skissa området i xy -planet som beskrivs av följande två ekvationer:

$$y \geq x^2 + 4x + 1, \quad y \leq 1.$$

Ledning: kvadratkomplettera uttrycket $x^2 + 4x + 1$.

7. (a) Lös ekvationen $\cos(3x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) Lös ekvationen $\tan^2 x + 2 \cos^2 x = 2$.

8. (a) Låt $u = -4\sqrt{3} + 4i$ och $v = 3 - 3i$. Ange u och v på polär form och beräkna uv och $\frac{u}{v}$, som också skall anges på polär form.

(b) Lös ekvationen $x^2 + 2ix - 3 - 2\sqrt{3}i = 0$.

Lycka till!