Lösningsförslag till tentamen i Baskurs i matematik den 25 mars 2008.

1. (a) I basfallet skall man visa att $\frac{5!}{2} > 2^5$.

I induktionssteget skall man visa att om $n \geq 5$ och

$$\frac{n!}{2} > 2^n$$

så gäller även att $\frac{(n+1)!}{2} > 2^{n+1}$.

(b) Bevis av att $\frac{n!}{2} > 2^n$ för alla $n = 5, 6, 7, \ldots$, med induktion.

<u>Basfall:</u> $\frac{5!}{2} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{2} = 60$

och $2^5 = 32$, så $\frac{5!}{2} > 2^5$.
(så olikheten stämmer för $n=5$).

<u>Induktionssteg</u>

Antag, som induktionshypotes, att $n \geq 5$ och att $\frac{n!}{2} > 2^n$.

Då gäller att

$$\frac{(n+1)!}{2} = (n+1)\frac{n!}{2} > (n+1)2^n >$$
$$> 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$$

där den första olikheten följer från induktionshypotesen och den andra olikheten eftersom $n+1 > 2$ om $n \geq 5$.

Vi har visat att om $n \geq 5$ och $\frac{n!}{2} > 2^n$ så gäller även $\frac{(n+1)!}{2} > 2^{n+1}$.

Enligt induktionsaxiomet så gäller $\frac{n!}{2} > 2^n$ för alla $n = 5, 6, 7, 8, \ldots$

2. (a) Vi kan ordna de tre ämnesblocken på 3! sätt. Sedan kan matematikblocket ordnas på 3!, fysikblocket på 4! sätt och kemiblocket på 2! sätt. Eftersom antalet sätt att göra de olika ordningsvalen på är oberoende av de övriga ordningsvalen så blir det sökta antalet uppställningar på hyllan

$$3! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 2! = 1728.$$

(b) Varje fördelning av de 10 kronorna kan kodas som en följd av 10 ettor och 3 nollor, så att exempelvis följden

1101011110111

kodar fördelningen att

a får 2 kronor
b får 1 krona
c får 4 kronor
d får 3 kronor.

(Vi kallar de fyra personerna a, b, c och d.)

Varje fördelning motsvarar alltså ett val av 3 placeringar i följden bland $10+3=13$ möjliga placeringar. Antalet fördelningar är alltså

$$\binom{13}{3} = \frac{13\cdot 12\cdot 11}{3\cdot 2} = 858.$$

3 (a) $|2x-5| < 3x$

$\iff -3x < 2x-5 < 3x$

$\iff \begin{cases} -3x < 2x-5 \\ 2x-5 < 3x \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 1 < x \\ -5 < x \end{cases} \iff 1 < x$.

Så x löser olikheten $\iff x > 1$.

(b) $\dfrac{x(x+1)}{6} > 1$

$\iff x(x+1) > 6$

$\iff x^2 + x - 6 > 0$

$\iff (x-2)(x+3) > 0$

$\iff \begin{cases} x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$ eller $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+3 < 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x > 2 \\ x > -3 \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x < 2 \\ x < -3 \end{cases}$$

$$\iff \quad x > 2 \quad \text{eller} \quad x < -3 .$$

Så x löser olikheten $\iff$

$x > 2$ eller $x < -3$.

4. (a) $$2^{(\log_2(3) + \log_3(18) - \log_3(2))}$$

$$= 2^{(\log_2(3) + \log_3(\frac{18}{2}))}$$

$$= 2^{(\log_2(3) + \log_3 9)}$$

$$= 2^{(\log_2(3) + 2)}$$

$$= 2^{\log_2(3)} \cdot 2^2$$

$$= 3 \cdot 4 = 12 .$$

(b) $\log_{10}(10x^2) - \log_{10}(4-3x) = 1$

$\Longleftrightarrow \log_{10}(10) + \log_{10}(x^2) - \log_{10}(4-3x) = 1$

$\Longleftrightarrow 1 + \log_{10}(x^2) - \log_{10}(4-3x) = 1$

$\Longleftrightarrow \log_{10}\left(\frac{x^2}{4-3x}\right) = 0$

$\Longleftrightarrow \frac{x^2}{4-3x} = 1$

$\Longleftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$

$\Longleftrightarrow x = 1$ eller $x = -4$

Så lösningarna ges av $x=1$ och $x=-4$.

5. (a)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4x - 5 \\
\hline
x^2 - 4 & x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 16x + 20 \\
 & x^4 \qquad\quad - 4x^2 \\
\hline
 & \quad -4x^3 - 5x^2 + 16x + 20 \\
 & \quad -4x^3 \qquad\quad + 16x \\
\hline
 & \qquad\quad -5x^2 \qquad + 20 \\
 & \qquad\quad -5x^2 \qquad + 20 \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Kvoten blir $x^2 - 4x - 5$ och resten 0.

(b) Enligt (a)-delen så

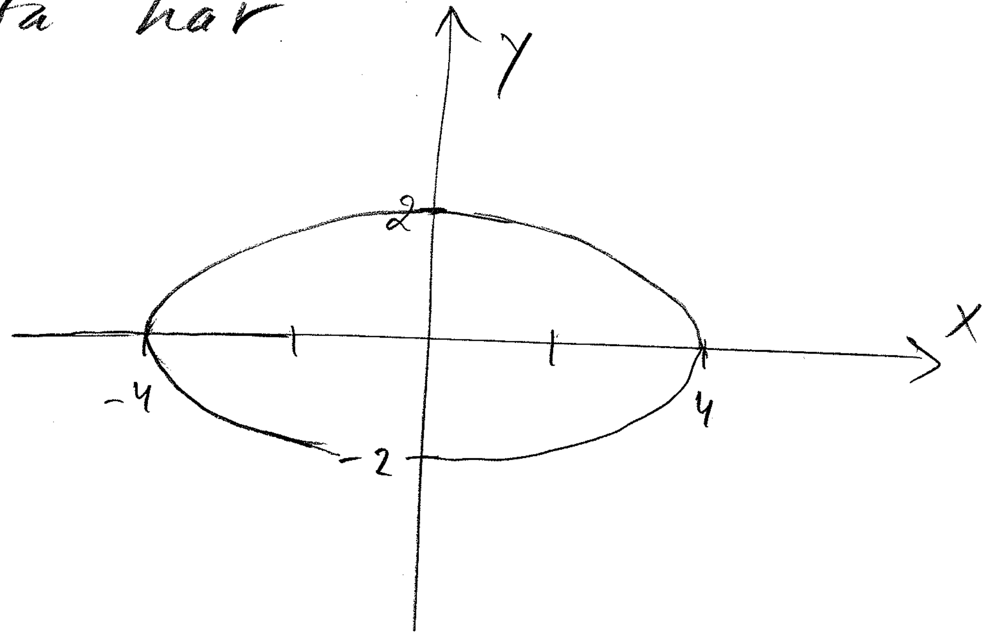
$$
\begin{aligned}
p(x) &= x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 16x + 20 \\
&= (x^2 - 4)(x^2 - 4x - 5).
\end{aligned}
$$

Ekvationen $x^2 - 4 = 0$ har rötterna $x = \pm 2$ så $(x^2 - 4) = (x-2)(x+2)$.
Ekvationen $x^2 - 4x - 5 = 0$ har rötterna $x = -1$ och $x = 5$ så

$$(x^2 - 4x - 5) = (x+1)(x-5).$$

Så $p(x) = (x-2)(x+2)(x+1)(x-5)$
där alla faktorerna har grad 1.

6. (a) Ellipsen ser ut ungefär så här



och dess ekvation är

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

Linjen som passerar igenom $(4,0)$ och $(0,2)$ har lutningen $\frac{0-2}{4-0} = -\frac{1}{2}$.
Dess ekvation har formen

$$y = -\frac{1}{2}x + m$$

där m behöver bestämmas.

Eftersom $(0, 2)$ ligger på linjen

så $2 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + m$ och $m = 2$

Linjens ekvation är alltså

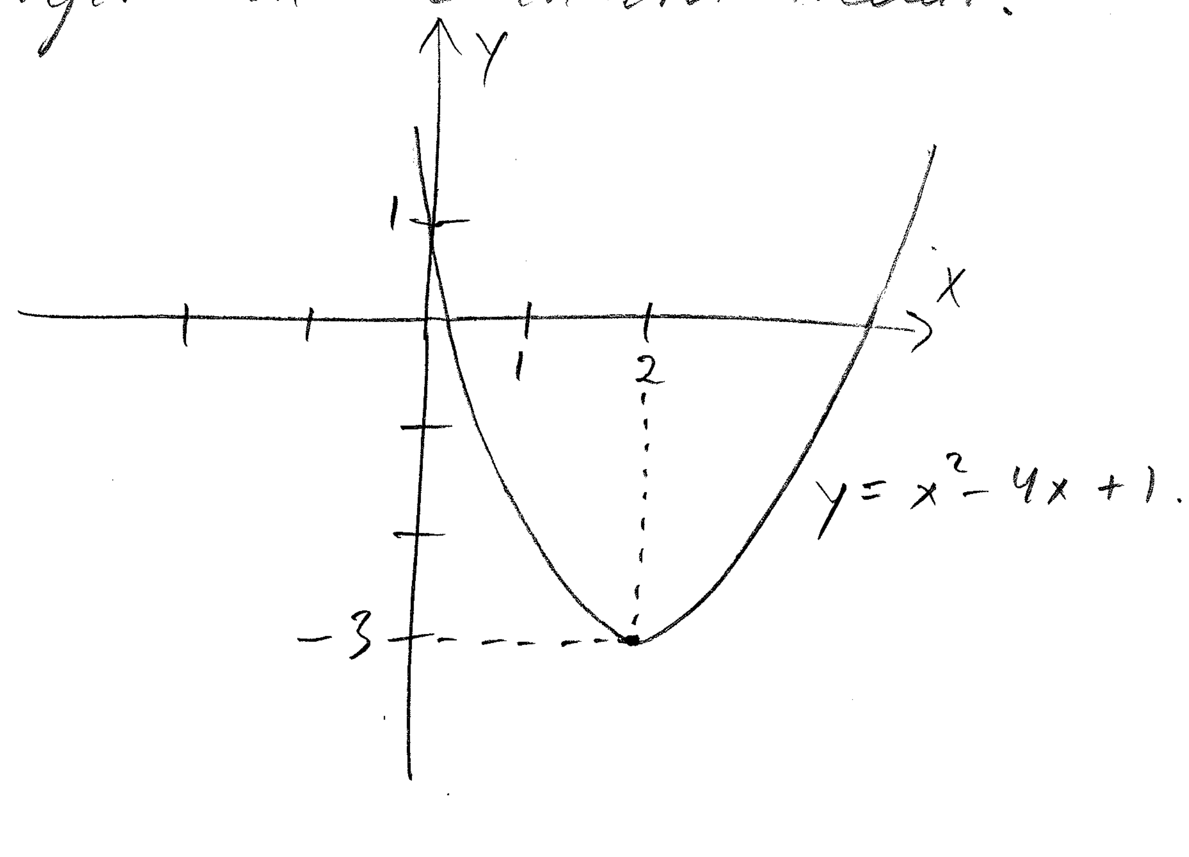
$$y = -\frac{x}{2} + 2$$

(b) $y = x^2 - 4x + 1$

$\Leftrightarrow y = (x-2)^2 - 4 + 1$

$\Leftrightarrow y = (x-2)^2 - 3$

Man ser nu att kurvan är en förskjutning av $y = x^2$ två enheter till höger och tre enheter nedåt.



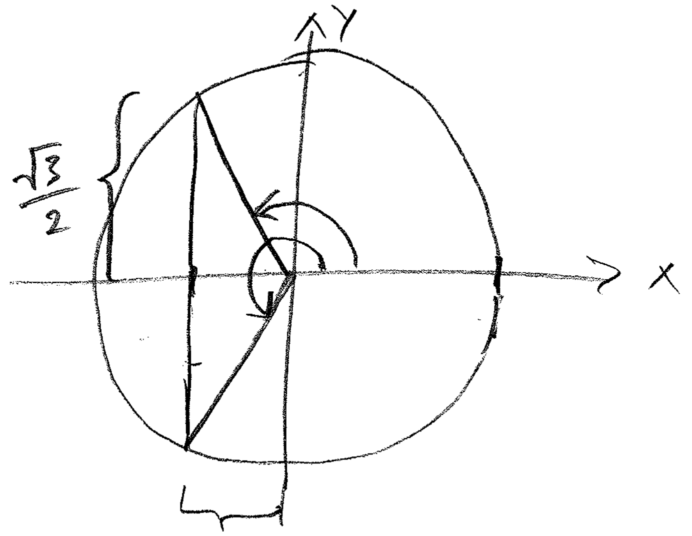
7 (a) Sätt $y = 2x$.

På intervallet $[0, 2\pi)$ så har

$\cos y = -\frac{1}{2}$ lösningarna

$y = \frac{2\pi}{3}$ och $y = \frac{4\pi}{3}$

vilket inses genom betraktelse av enhetscirkeln och 30°-60°-90°-gradersriangeln:



Så $y = \frac{2\pi}{3} \pm 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

och $y = \frac{4\pi}{3} \pm 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

ger alla lösningarna till $\cos y = -\frac{1}{2}$

Återsubstitution $2x = y$ och division med 2 ger lösningarna

$$x = \frac{\pi}{3} \pm \pi n \quad , n = 0, 1, 2, \ldots$$

och $$x = \frac{2\pi}{3} \pm \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

där ett av uttrycken, t.ex.

$$x = \frac{\pi}{3} \pm \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

faktiskt får med alla lösningarna.

(b) $$\sin^2 x + 3\cos^2 x = 2$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 x + 3\cos^2 x = 2$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Så vi måste lösa både

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

På liknande sätt som i (a)-delen så ser man att på $[0, 2\pi)$ så ges lösningarna av

$$\frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{4}, \quad \frac{7\pi}{4}$$

och då ges alla lösningar av

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2} n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

8. (a) På polär form har vi

$$-3\sqrt{3} + 3i = 6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Detta ger

$$(-3\sqrt{3} + 3i)(\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i) =$$

$$6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\cdot\, 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 6\cdot 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 12\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right).$$

och

$$\frac{-3\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i} = \frac{6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{6}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 3\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

(b) $x^4 + 16 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^4 = -16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi).$

Det komplexa talet $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ är en lösning $\Leftrightarrow$

$$r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\theta = \pi + 2\pi n, \quad n = 0,1,2,3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, \quad n = 0,1,2,3. \end{cases}$$

Så lösningarna är

$$2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$$

$$2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$$

$$2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$$

$$2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$$