Baskurs i matematik, 2009-02-13

Lösningsförslag:

1. Rekursiv definition:

$$a_0 = 1 \ , \ a_{n+1} = 3a_n + 2 \ .$$

(a) I basfallet skall visas att $a_n = 2 \cdot 3^n - 1$ stämmer för $n = 0$ (dvs att $a_0 = 2 \cdot 3^0 - 1$).

I induktionssteget skall visas att **om** $a_n = 2 \cdot 3^n - 1$ så gäller även att $a_{n+1} = 2 \cdot 3^{n+1} - 1$.

(b) Induktionsbevis av att $a_n = 2 \cdot 3^n - 1$ är en sluten formel för den rekursivt definierade talföljden:

Basfall: Om $n = 0$ så

$$2 \cdot 3^n - 1 = 2 \cdot 3^0 - 1 = 1 = a_0 = a_n .$$

Induktionssteg: Antag att

(IA) $\quad a_n = 2\cdot 3^n - 1$.

enligt definition.

Då gäller att $a_{n+1} = 3a_n + 2$

$\overset{(IA)}{=} 3(2\cdot 3^n - 1) + 2 = 2\cdot 3^{n+1} - 1$.

(Så om $a_n = 2\cdot 3^n - 1$ så gäller även
$a_{n+1} = 2\cdot 3^{n+1} - 1$.)

Enligt induktionsaxiomet så stämmer den slutna formeln
$a_n = 2\cdot 3^n - 1$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

kom visst i fel ordning

3. (a) $|2-5x| < 7 \iff$

$-7 < 2-5x < 7 \iff \begin{cases} -7 < 2-5x \\ 7 > 2-5x \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 5x < 9 \\ 5x > -5 \end{cases} \iff \begin{cases} x < \frac{9}{5} \\ x > -1 \end{cases}$

$\iff -1 < x < \frac{9}{5}$

$(\iff x \in (-1, \frac{9}{5}))$.

(b) $\dfrac{x^2-2}{x} > 1$.

Fall 1: Antag att $x > 0$.

$$\frac{x^2-2}{x} > 1 \iff x^2 - 2 > x$$

$$\iff x^2 - x - 2 > 0 \iff (x+1)(x-2) > 0$$

($\iff$ båda faktorerna är > 0 eller
båda faktorerna är < 0.)

Teckentabell:

		-1		2		x
$(x+1)$	$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)$	$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$\boxed{+}$	

Eftersom vi antar att $x > 0$
så får vi lösningarna $\underline{x > 2}$
i detta fall.

Fall 2: Antag att $x < 0$.

$$\frac{x^2-2}{x} > 1 \iff x^2 - 2 < x$$

$$\iff (x+1)(x-2) < 0$$

($\iff$ exakt en faktor är > 0).

Från teckentabellen ser vi att
$(x+1)(x-2)<0 \iff -1<x<2$
men eftersom vi i detta fall
antar att $x<0$ så får vi bara
lösningarna $-1<x<0$.

Båda fallen sammantaget visar
att $\dfrac{x^2-1}{x}>1 \iff$

$x>2$ eller $-1<x<0$
$\left(\iff x \in (-1,0) \cup (2,\infty)\right)$.

2. Med "tal" menas här "heltal ≥ 0"
som alltså inte kan börja med '0'
om talet är 7-siffrigt.

(a) Första siffran måste vara '1'.
De övriga 6 siffrorna består
av 3 ettor och 3 nollor.
Talet bestäms sålunda av de 3
ettornas placering bland de

6 sista platserna. Antalet tal av det slag som efterfrågas i (a) är alltså $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$.

(b) Första siffran kan nu vara $1, 2, 3, \ldots, 9$. De andra siffrorna kan vara $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Fall 1: Första siffran är '1'. Placering av de återstående 3 ettorna bland de återstående 6 platserna kan väljas på $\binom{6}{3}$ sätt. Sedan kan siffror bland $0, 2, 3, \ldots, 9$ väljas på 9^3 sätt för de återstående 3 platserna (oberoende av ettornas placering). Detta fall ger alltså $\binom{6}{3} \cdot 9^3$ olika tal.

Fall 2: Första siffran är inte 4!

Placering för de 4 ettorna kan väljas på $\binom{6}{4}$ sätt bland de 6 sista placeringarna. Första siffran kan sedan väljas på 8 sätt (bland 2, 3, ..., 9). Sedan kan siffror bland 0, 2, 3, .., 9 väljas på 9^2 sätt för de två återstående platserna. Eftersom antalet sätt att göra de olika valen inte beror på tidigare val så får vi

$$\binom{6}{4} \cdot 8 \cdot 9^2$$ olika tal.

Fallen tillsammans visar att det eftersökta antalet är

$$\binom{6}{3} \cdot 9^3 + \binom{6}{4} \cdot 8 \cdot 9^2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} \cdot 9^3$$

$$+ \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 8 \cdot 9^2 = 14580 + 9720 = 24300.$$

$\boxed{\text{Obs! } \binom{6}{4} = \binom{6}{6-4} = \binom{6}{2}}$

4. (a) $\log_3(3^5 \cdot 9^{\overbrace{\log_4 16}^{2}}) =$

$\log_3(3^5) + \log_3(9^2) =$

$5\log_3 3 + 2\log_3 9 =$

$5 + 2 \cdot 2 = 9.$

(b)

$\log_4(3x^2 - x - 26) - \log_2(x-1) = \frac{1}{2} \iff$

$\frac{\log_2(3x^2-x-26)}{\log_2 4} = \log_2(x-1) + \frac{1}{2} \iff$

$\boxed{\text{Obs! } \log_2 4 = 2}$

$\log_2(3x^2 - x - 26) = 2\log_2(x-1) + 1 \iff$

$\log_2(3x^2 - x - 26) = \log_2(x-1)^2 + 1 \implies$

$2^{\log_2(3x^2-x-26)} = 2^{\log_2(x-1)^2 + 1} \iff$

$3x^2 - x - 26 = 2^{\log_2(x-1)^2} \cdot 2^1 \iff$

$3x^2 - x - 26 = (x-1)^2 \cdot 2 \iff$

$3x^2 - x - 26 = 2x^2 - 4x + 2 \iff$

$x^2 + 3x - 28 = 0 \iff$

$x = -7$ eller $x = 4$.

Test visar att $x = 4$ löser den ursprungliga ekv. men $\log_2(x-1)$ är inte definierad för $x = -7$, så enda lösn. är $x = 4$.

5 (a)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 4 \\
\hline
x^2 - x - 6 & x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 20 \\
 & x^4 - x^3 - 6x^2 \\
\hline
 & \quad\quad 4x^2 - 4x - 20 \\
 & \quad\quad 4x^2 - 4x - 24 \\
\hline
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad 4
\end{array}
$$

Kvoten blir x^2+4 och resten 4 vilket betyder att

$x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 20 =$

$(x^2+4)(x^2-x-6) + 4$.

(b) $x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24 =$

$(x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 20) - 4 \stackrel{\text{enligt (a)-delen.}}{=}$

$((x^2+4)(x^2-x-6) + 4) - 4 =$

$(x^2+4)(x^2-x-6) =$ $\boxed{\text{kan använda p-q-formeln}}$

$(x-2i)(x+2i)(x+2)(x-3)$

som är en produkt av faktorer med grad 1.

6. (a) Avståndet mellan $(-2,4)$ och $(1,-3)$ är $\sqrt{(-2-1)^2 + (4-(-3))^2}$

$= \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$.

Den givna cirkeln har centrum i $(1,-3)$ och radien $\sqrt{58}$ så dess ekvation är

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 58.$$

(10)

(b) $9x^2 + 36x + 4y^2 + 8y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 9(x^2 + 4x) + 4(y^2 + 2y) + 4 = 0$

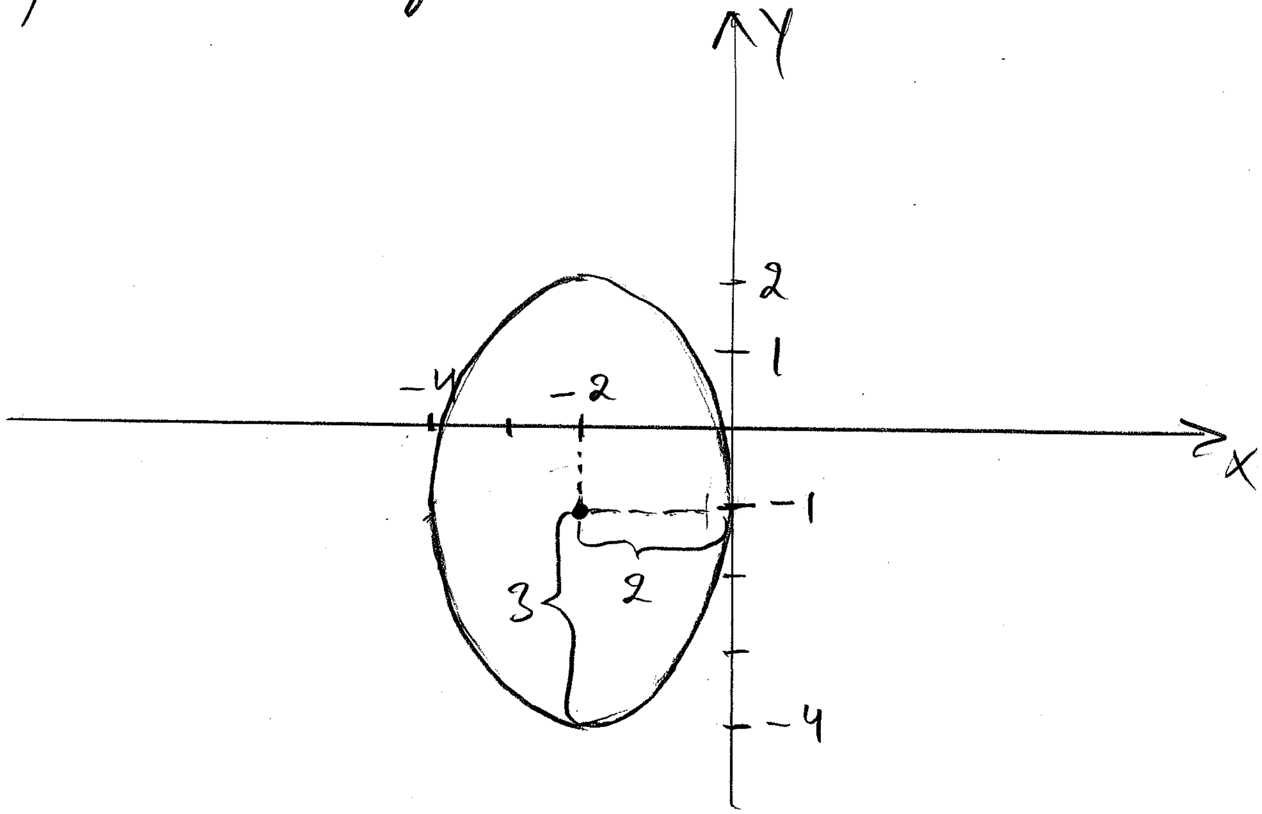
$\Leftrightarrow 9((x+2)^2 - 4) + 4((y+1)^2 - 1) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 9(x+2)^2 - 36 + 4(y+1)^2 - 4 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 9(x+2)^2 + 4(y+1)^2 = 36$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{3}\right)^2 = 1$

Nu ser vi att ekvationen beskriver följande ellips, med centrum i (-2,-1).



7. (a) Vi löser $\tan(\frac{x}{2}) = -1$.

Sätt $y = \frac{x}{2}$. Eftersom $\tan y = \frac{\sin y}{\cos y}$ så innebär $\tan y = -1$ att $\sin y$ och $\cos y$ har samma absolutbelopp men olika tecken. Betraktelse av enhetscirkeln visar att de enda möjligheterna på intervalet $y \in (-\pi, \pi]$ är $y = \frac{3\pi}{4}$ och $y = -\frac{\pi}{4}$. Eftersom $\frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + \pi$ så kan alla lösningar till $\tan y = -1$ sammanfattas som

$$y = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Då ges alla lösningar till $\tan(\frac{x}{2}) = -1$ av $x = 2y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$.

(b)
$$\frac{\sin x}{2} + \cos^2(\tfrac{x}{2}) = 0 \qquad (1)$$

$\boxed{x = 2 \cdot \frac{x}{2}}$ $\Longleftrightarrow$
$$\frac{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{2} + \cos^2(\tfrac{x}{2}) = 0 \qquad (2)$$

Om $\cos(\frac{x}{2}) = 0$ så löser x ekv. (1) och (2).

$\cos(\frac{x}{2}) = 0 \Longleftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow$

$x = \pi + 2\pi n \ , n \in \mathbb{Z}.$

Antag nu att $\cos(\frac{x}{2}) \neq 0$. Division av (2) med $\cos^2(\frac{x}{2})$ ger

$$\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} + 1 = 0 \iff \tan(\frac{x}{2}) = -1$$

(a)-delen

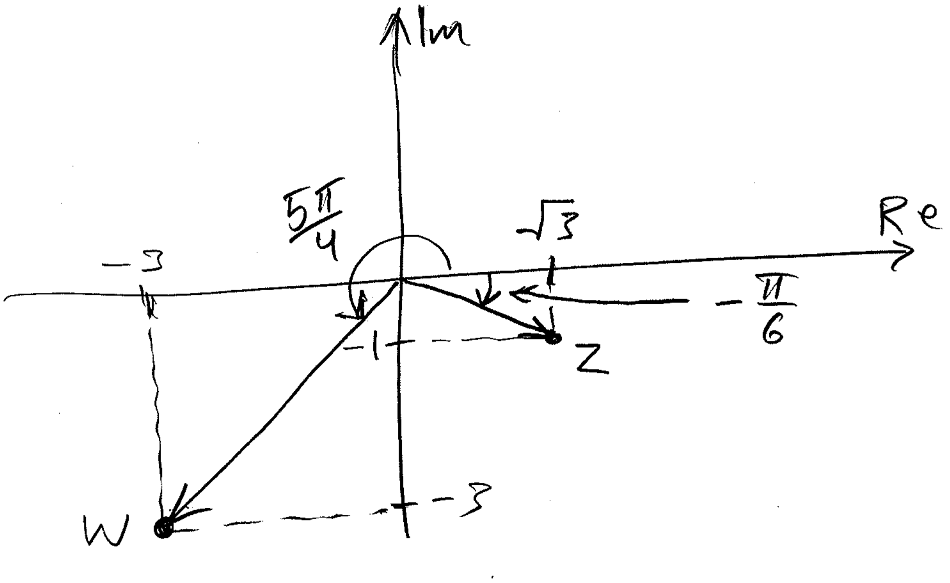
$$\iff x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \ , n \in \mathbb{Z}.$$

Sammantaget så följer att ekv. (1) har lösningarna $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ och $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

8 (a) $z = \sqrt{3} - i$, $w = -3 - 3i$.

$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$

$|w| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$



Vi ser från figuren att argumenten för z och w kan tas som $-\frac{\pi}{6}$ och $\frac{5\pi}{4}$ så $z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ och $w = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

Vi får nu

$$zw = 2\cdot 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 6\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right), \text{ och}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{2}{3\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{17\pi}{12}\right)\right)$$

$$\left(= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right) \right)$$

(b) $z^2 - (2-2i)z + 6i = 0$

$$\Longleftrightarrow (z-(1-i))^2 + 2i + 6i = 0$$

$$\Longleftrightarrow (z-(1-i))^2 = -8i$$

Sätt $a+bi = z-(1-i)$, där $a,b \in \mathbb{R}$, och ekvationen blir

$$(a+bi)^2 = -8i$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + 2abi - b^2 = -8i$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ \underbrace{2ab = -8}_{\substack{\text{medför att} \\ a \neq 0 \text{ och } b \neq 0}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ b = -\frac{4}{a} \end{cases}$$

Så $a^2 - \left(-\frac{4}{a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{16}{a^2}$

$\Leftrightarrow a^4 = 16 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$.

Om $a = 2$ så $b = -\frac{4}{2} = -2$ och

$z = 2 - 2i + (1-i) = \underline{3 - 3i}$.

Om $a = -2$ så $b = -\frac{4}{-2} = 2$ och

$z = -2 + 2i + (1-i) = \underline{-1 + i}$.

Så lösningarna är $3-3i$ och $-1+i$.