Baskurs i matematik, 2009-03-07

Lösningsförslag

1.(a) I basfallet skall man visa att den slutna formeln stämmer för $n=0$. (dvs. att $2^{2\cdot 0+1}+1=3$.)

I induktionsteget skall man visa att om den slutna formeln stämmer för n (dvs. $a_n = 2^{2n+1}+1$) så stämmer också den slutna formeln för $n+1$ (dvs. $a_{n+1} = 2^{2(n+1)+1}+1$).

(b) Vi utför nu induktionsbeviset.

Basfall: Om $n=0$ så

$$2^{2\cdot 0+1}+1 = 2^1+1 = 3 = a_0.$$

Induktionssteg: Antag att

(IA) $a_n = 2^{2n+1} + 1$.

Då gäller att

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= 4a_n - 3 && \text{(enligt definitionen)} \\
&= 4(2^{2n+1} + 1) - 3 && \text{(enligt (IA))} \\
&= 4 \cdot 2^{2n+1} + 4 - 3 \\
&= 2^2 \cdot 2^{2n+1} + 1 \\
&= 2^{2n+2+1} + 1 \\
&= 2^{2(n+1)+1} + 1
\end{aligned}
$$

Så den slutna formeln stämmer även för $n+1$.

Från induktionsaxiomet drar vi slutsatsen att den slutna formeln $a_n = 2^{2n+1} + 1$ stämmer för alla $n \in \mathbb{N}$.

2 (a) De två platserna för ettorna kan väljas på $\binom{7}{2}$ sätt.

På de resterande 5 platserna kan vi ha en tvåa eller trea, alltså två möjligheter, oberoende av vad som står på de övriga platserna. Det sökta antalet blir därför

$$\binom{7}{2} \cdot 2^5 = \frac{7 \cdot \cancel{6}^{3}}{\cancel{2}} \cdot 32$$

$$= 21 \cdot 32 = 672.$$

(b) Låt A vara antalet sjusiffriga positiva heltal med exakt två ettor som står intill varandra och där övriga siffror är antingen tvåor eller treor.

Två ettor intill varandra kan vi betrakta som ett enda "block".

Detta block kan finnas på 6 olika platser och de resterande 5 platserna kan vara en tvåa eller trea, oberoende av vad som står på övriga platser. Detta ger att

$$A = 6 \cdot 2^5 = 6 \cdot 32 = 192.$$

Kom ihåg att 672 är svaret på (a)-delen. Svaret på (b)-delen blir nu

$$672 - A = 672 - 192 = 480.$$

3.(a) $|x+4| > 2 \iff$

$x+4 > 2$ <u>eller</u> $x+4 < -2 \iff$

$x > -2$ <u>eller</u> $x < -6$

$\Big(\iff x \in (-2, \infty)$ eller $x \in (-\infty, -6)$

$\iff x \in (-2, \infty) \cup (-\infty, -6) \Big)$

(b) $$\frac{x^2-1}{|x+1|} > 1 \iff \frac{(x-1)(x+1)}{|x+1|} > 1.$$

Vi får två fall.

<u>Fall 1</u> $x+1>0$ (så $x>-1$).

$$\frac{(x-1)(x+1)}{|x+1|} > 1 \iff \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} > 1$$

$$\iff x-1>1 \iff x>2.$$

<u>Fall 2</u> $x+1<0$ (så $x<-1$).

$$\frac{(x-1)(x+1)}{|x+1|} > 1 \iff \frac{(x-1)(x+1)}{-(x+1)} > 1$$

$$\iff -(x-1)>1 \iff x<0.$$

Men notera att antagandet $x+1<0$ medför att $x<-1$, så vi får i detta fall (endast) lösningarna $x<-1$.

Tillsammans ger fallen att

$$\frac{x^2-1}{|x+1|} > 1 \iff$$

$x > 2$ eller $x < -1 \iff$

$x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.

4 (a) $2\log_3\left(\frac{\log_2 8}{9}\right) = 2\log_3\left(\frac{3}{9}\right)$

$= 2(\log_3 3 - \log_3 9) =$

$= 2(1-2) = -2$.

(b) $25^{\frac{x}{2}} = 5^{\sqrt{2x+3}}$

$\iff \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^x = 5^{\sqrt{2x+3}}$

$\iff 5^x = 5^{\sqrt{2x+3}}$

$$\Longrightarrow \quad \log_5(5^x) = \log_5\left(5^{\sqrt{2x+3}}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad x = \sqrt{2x+3}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 = 2x+3$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = 3 \text{ eller } x = -1.$$

Men kontroll i ursprungs-ekvationen visar att endast $x = 3$ är en lösning till denna.

5. (a)

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 2x + 2 \\
\hline
x^2 - 3x - 4 & x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 2x - 1 \\
 & x^4 - 3x^3 - 4x^2 \\
\hline
 & -2x^3 + 8x^2 + 2x - 1 \\
 & -2x^3 + 6x^2 + 8x \\
\hline
 & 2x^2 - 6x - 1 \\
 & 2x^2 - 6x - 8 \\
\hline
 & 7
\end{array}$$

8

När $x^4-5x^3+4x^2+2x-1$ delas med x^2-3x-4 så blir kvoten x^2-2x+2 och resten blir 7, vilket innebär att

$$x^4-5x^3+4x^2+2x-1 =$$

$$(x^2-2x+2)(x^2-3x-4)+7.$$

(b) $$x^4-5x^3+4x^2+2x-8 =$$

$$(x^4-5x^3+4x^2+2x-1)-7 =$$ enligt (a)-delen

$$((x^2-2x+2)(x^2-3x-4)+7)-7 =$$

$$(x^2-2x+2)(x^2-3x-4)$$

Så rötterna till

$$x^4-5x^3+4x^2+2x-8=0$$

ges av rötterna till

$x^2-2x+2=0$ och $x^2-3x-4=0$,

och dessa är $1\pm i$, -1 och 4.

6. (a) Linjen som passerar igenom (1, 1) och (0, −1) har lutning $k = \frac{1-(-1)}{1-0} = 2$

och ekvation $y = 2x + m$.

Eftersom (0, −1) ligger på linjen får vi $-1 = 2 \cdot 0 + m \Leftrightarrow m = -1$.

Så ekvationen är $y = 2x - 1$.

Cirkeln med centrum i (0, −1) och som passerar igenom (1, 1) har ekvationen

$$(x-0)^2 + (y-(-1))^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 5$$

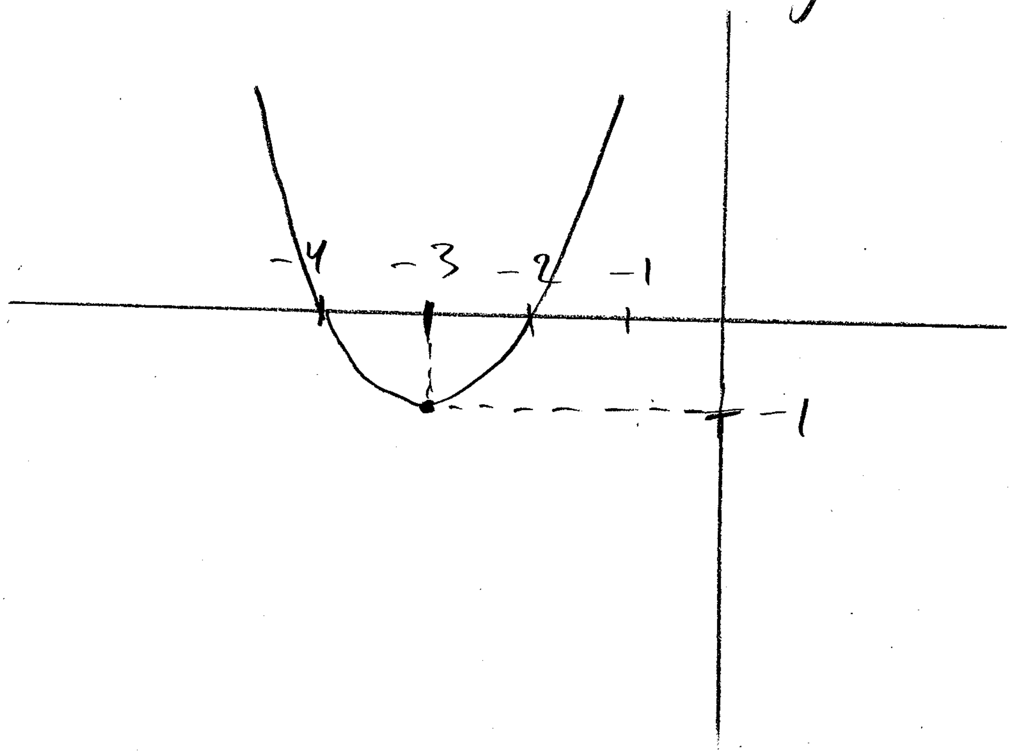
eftersom radien är lika med avståndet mellan (0, −1) och (1, 1) vilket är $\sqrt{(0-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{5}$.

6. (b) $y = x^2 + 6x + 8$

$$= (x+3)^2 - 9 + 8$$

$$= (x+3)^2 - 1$$

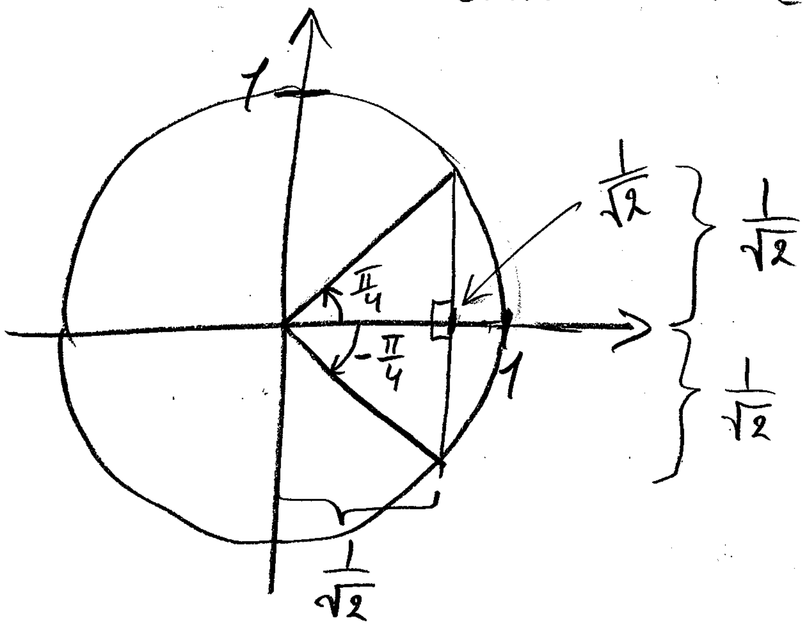
Så kurvan $y = x^2 + 6x + 8$
är en förskjutning av $y = x^2$
3 enheter till vänster och 1 enhet
nedåt (i xy-planet). Figur:



7. (a) Vi löser $\cos\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Sätt $y = \frac{x}{3}$ och vi får $\cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Betraktelse av enhetscirkeln:



Vi ser att på intervallet $[-\pi, \pi]$ finns (endast) lösningarna

$y = \frac{\pi}{4}$ och $y = -\frac{\pi}{4}$ så

samtliga lösningar till $\cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ges av $y = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

och $y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Då ges samtliga lösningar till

$\cos\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ av

$$x = 3y = \frac{3\pi}{4} + 6\pi n \ , n \in \mathbb{Z}$$

och $x = 3y = -\frac{3\pi}{4} + 6\pi n \ , n \in \mathbb{Z}$.

(b) Med hjälp av

$$\sin^2\left(\frac{x}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{3}\right) = 1$$

får vi

$$4\cos^2\left(\frac{x}{3}\right) - 2\sin^2\left(\frac{x}{3}\right) = 1$$

$$\Longleftrightarrow 4\cos^2\left(\frac{x}{3}\right) - 2\left(1 - \cos^2\left(\frac{x}{3}\right)\right) = 1$$

$$\Longleftrightarrow 4\cos^2\left(\frac{x}{3}\right) - 2 + 2\cos^2\left(\frac{x}{3}\right) = 1$$

$$\Longleftrightarrow 6\cos^2\left(\frac{x}{3}\right) = 3$$

$$\Longleftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \cos\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ eller

$$\cos\left(\frac{x}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

I (a)-delen fann vi alla lösningarna

$$x = \frac{3\pi}{4} + 6\pi n \quad , n \in \mathbb{Z}$$

och $x = -\frac{3\pi}{4} + 6\pi n \quad , n \in \mathbb{Z}$

till $\cos\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och dessa löser även

$$4\cos^2\left(\frac{x}{3}\right) - 2\sin^2\left(\frac{x}{3}\right) = 1 .$$

Övriga lösningar till ovanstående ekv. ges av lösningarna till $\cos\left(\frac{x}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ och dessa är (liknande resonemang som i (a)-delen)

$$x = \frac{9\pi}{4} + 6\pi n \quad , n \in \mathbb{Z}$$

och $x = -\frac{9\pi}{4} + 6\pi n \quad , n \in \mathbb{Z}$.

8. (a) $z = 1+i$

$$w = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Genom att betrakta var z ligger i det komplexa talplanet så ser vi, eftersom realdelen och imaginärdelen är positiva och lika stora, att $\frac{\pi}{4}$ är ett argument för z.

Och $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, så

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Så $z^4 = (\sqrt{2})^4\left(\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$= 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

och $\frac{z}{w} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)$

$$= \cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}.$$

(b) $z^4 = -4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ är en lösning till

$z^4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$

om och endast om

$$\begin{cases} r^4 = 4 \\ 4\theta = \pi + 2\pi n \quad \text{för något } n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Det räcker att betrakta $n = 0, 1, 2, 3$ och vi får $r = \sqrt{2}$ och

$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n \quad , n = 0, 1, 2, 3.$

Så lösningarna är

$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\cdot n\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)$

där $n = 0, 1, 2, 3.$

Figur: