

Baskurs i matematik, 2009-06-11 ①

Lösningförslag till a-delar

1 (a) I basfallet skall man visa att formeln $a_n = 2 \cdot 3^n - 1$ stämmer om $n=0$, dvs att $2 \cdot 3^0 - 1 = 1$ (eftersom $a_0 = 1$ per definition).

I induktionssteget skall man visa att om $a_n = 2 \cdot 3^n - 1$ stämmer så stämmer även $a_{n+1} = 2 \cdot 3^{n+1} - 1$ (oavsett vilket naturligt tal n är).

2 (a) Placeringar för de 5 errorna bland 7 möjliga platser kan väljas på $\binom{7}{5}$ sätt. Därefter finns två möjliga val för var och en av de två återstående platserna.

Pga antalet valmöjligheter i varje val är oberoende av de tidigare valen

så med för multiplikationsprincipen ②
att antalet sjusiffriga tal av det
nämnda slaget är

$$\binom{7}{5} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{7!}{5!2!} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 2 \cdot 2 \\ = 42 \cdot 2 = 84.$$

$$3(a) \quad |2 - 3x| > 1$$

$$\Leftrightarrow 2 - 3x > 1 \text{ eller } 2 - 3x < -1$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{3} \text{ eller } x > 1.$$

$$(\Leftrightarrow x \in (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, \infty).)$$

$$4(a) \quad 3 \log_3 \left(\frac{1}{\log_3 27} \right) = 3 \log_3 \left(\frac{1}{3} \right) \\ = 3(\log_3 1 - \log_3 3) \\ = 3(0 - 1) = -3.$$

(3)

$$\begin{array}{r}
 5(a) \quad x^2 - 4x + 4 \overline{) \begin{array}{l} x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 36x + 25 \\ x^4 - 4x^3 + 4x^2 \\ \hline -4x^3 + 21x^2 - 36x + 25 \\ -4x^3 + 16x^2 - 16x \\ \hline 5x^2 - 20x + 25 \\ 5x^2 - 20x + 20 \\ \hline 5 \end{array}} \\
 \end{array}$$

Kvoten är $x^2 - 4x + 5$ och resten 5,

$$\text{så } x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 36x + 25$$

$$= (x^2 - 4x + 5)(x^2 - 4x + 4) + 5.$$

6(a) Avståndet mellan $(1, 2)$ och $(-1, -1)$

$$\begin{aligned}
 \text{är } \sqrt{(1 - (-1))^2 + (2 - (-1))^2} &= \sqrt{2^2 + 3^2} \\
 &= \sqrt{13}
 \end{aligned}$$

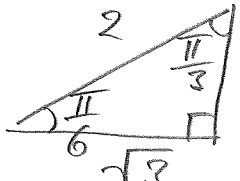
Den beskrivna cirkeln har radien $\sqrt{13}$ och centrum i $(1, 2)$ så dess ekvation är $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$.

(4)

7 (a) Vi löser $\sin(2x) = -\frac{1}{2}$.

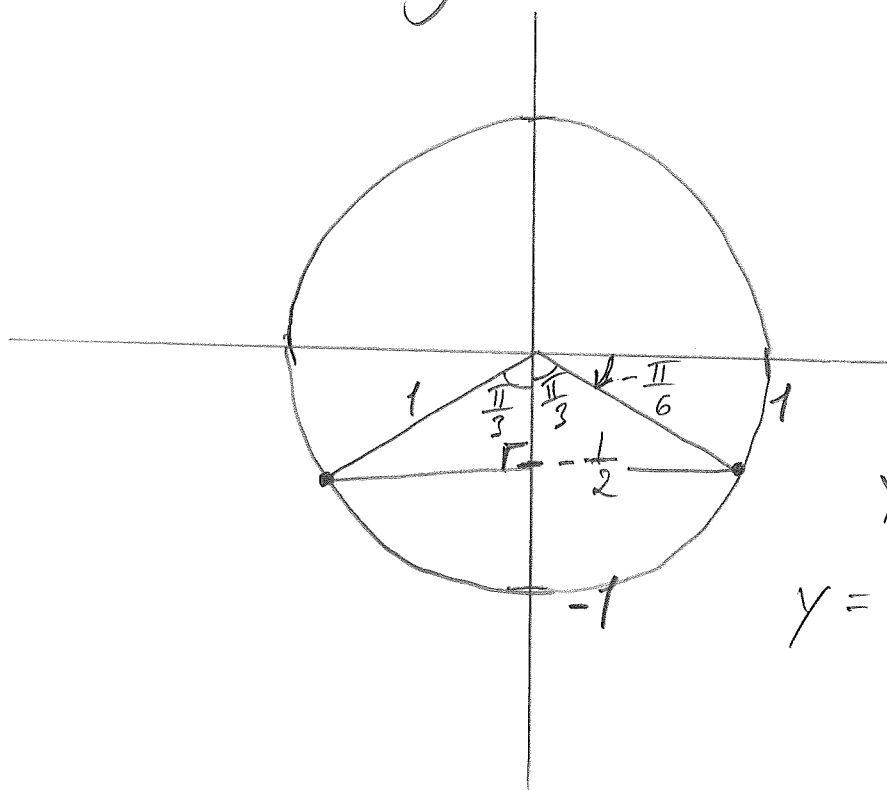
Sätt $y = 2x$, så vi får $\sin y = -\frac{1}{2}$.

Vi betraktar först valfritt intervall av längd 2π för y , tex intervallet $(-\pi, \pi]$. Betraktelse av enhetscirkeln,

triangeln  och ändring av

skalan (genom division med $\frac{1}{2}$)

visar att de enda lösningarna på intervallet $(-\pi, \pi]$ är de som markeras i figuren:



$$y = -\frac{\pi}{6} \text{ och}$$

$$y = -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{5\pi}{6}.$$

(5)

Samtliga lösningar till $\sin y = -\frac{1}{2}$ ges nu av

$$y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ och}$$

$$y = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Samtliga lösningar till $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ ges av

$$x = \frac{y}{2} = -\frac{\pi}{12} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ och}$$

$$x = \frac{y}{2} = -\frac{5\pi}{12} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

8(a). Eftersom $z = 2 + 2i$ har lika stora och positiva realdelar så är $\frac{\pi}{4}$ ett argument för z .

$$\text{Och } |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}.$$

$$\text{Så } z = \sqrt{8} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Eftersom $-\sqrt{2} \cdot i$ ligger på den negativa delen av den imaginära axeln så är $-\frac{\pi}{2}$ ett argument för w .

(6)

$$\text{Och } |w| = \sqrt{0^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Så } w = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\text{Vi får nu } zw =$$

$$\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \right)$$

$$= 4 \cdot \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right).$$

$$\text{Och } \frac{z}{w} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \right)$$

$$= 2 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$