UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Vera Koponen

Baskurs i matematik

Grundläggande[1] övningar i kombinatorik

Se till att ni klarar av dessa uppgifter innan ni går vidare till svårare uppgifter på andra stenciler.
Med *tal* menas, i uppgifterna nedan, alltid icke-negativa heltal.
På slutet finns svar och förklaringar till vissa uppgifter.

1. Hur många 5-siffriga tal kan bildas med siffrorna 1 och 2 ?

2. Hur många 5-siffriga tal kan bildas med siffrorna 4 och 7 ?

3. Antag att n är ett positivt heltal. Hur många n-siffriga tal kan bildas med siffrorna 3 och 5 ?

4. Hur många 4-siffriga tal kan bildas med hjälp av siffrorna 1, 2, 3, 4, 5, 6 ?

5. Hur många 4-siffriga tal kan bildas med hjälp av siffrorna 1, 2, 3, 4, 5, 6 om varje siffra får användas högst en gång?

6. (a) Hur många 6-siffriga tal kan bildas med siffrorna 1, 2, 3, 4, 5, 6 ?
(b) Hur många 6-siffriga tal kan bildas med siffrorna 1, 2, 3, 4, 5, 6 om varje siffra bara får användas en gång?

Ett objekt på formen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, där $a_1, a_2, \ldots, a_n$ är tal, kallas för en n-**tupel** (av tal). Exempelvis så är $(1, 3, 1, 12)$ och $(3, 12, 1, 1)$ (olika) 4-tupler.

7. Hur många n-tupler kan bildas med talen $1, 2, 3, \ldots, m$?

8. Antag att $n \leq m$. Hur många n-tupler kan bildas med talen $1, 2, 3, \ldots, m$ om varje tal får användas högst en gång?

9. (a) Hur många n-tupler kan bildas med talen $1, 2, 3, \ldots, n$?
(b) Hur många n-tupler kan bildas med talen $1, 2, 3, \ldots, n$ om varje tal bara får användas en gång?

10. Hur många 7-siffriga tal kan man bilda med 4 ettor och 3 tvåor?

11. Hur många 7-siffriga tal kan man bilda med 3 ettor, 2 tvåor och 2 treor?

12. Hur många 7-siffriga tal kan man bilda med siffrorna 1 och 2 om siffran 2 får användas högst två gånger?

13. Hur många 7-siffriga tal kan man bilda med siffrorna 1 och 2 om första siffran måste vara 1, och sista siffran måste vara 2 ?

14. Hur många 7-siffriga tal kan man bilda med siffrorna 1 och 2 om både 1 och 2 måste förekomma bland de två första siffrorna?

[1] Det är dock ganska stor variation i övningarnas svårighetsgrad, och några kan nog uppfattas som lite svårare.

15. Hur många 7-siffriga tal kan man bilda med siffrorna 1 och 2 om både 1 och 2 måste förekomma bland de tre första siffrorna?

16. Hur många 7-siffriga tal kan man bilda med 4 ettor och 3 tvåor, om första siffran måste vara 1 och sista siffran 2 ?

17. Hur många 9-siffriga tal kan man bilda med 4 ettor och 5 tvåor, om det måste finnas minst en etta bland de tre första siffrorna?

18. Hur många följder av nollor och ettor kan bildas med hjälp av 7 ettor och 3 nollor? (Varje sådan följd består alltså av 10 siffror.)

19. På hur många sätt kan 4 personer dela på 7 kronor? (Vi antar att var och en får ett heltalsbelopp.)

20. På hur många sätt kan 4 personer dela på 7 kronor om var och en ska få minst en krona?

21. Sju studenter skall välja (exakt) en kurs bland 4 möjliga.
(a) På hur många sätt kan dessa sju studenter välja kurs?
(b) På hur många sätt kan dessa sju studenter välja kurs, om vi endast bryr oss om hur många som valt respektive kurs (och inte vem som valt vad)?

◇ ◇ ◇

Fem vänner ska gå ut en kväll och alla måste ta ut pengar från bankomaten. (Detta är på tiden då man inte kunde betala med kort överallt.)

22. Hur många olika köer framför bankomaten kan de fem bilda?

Väl inne på stället så skall två av de fem gå till baren och köpa dryck åt sällskapet.

23. På hur många sätt kan dessa två väljas (bland fem personer)?

Lite senare har sällskapet utökats till 10 personer och det är dags att sätta sig till bords.

24. (a) På hur många olika sätt kan de 10 personerna placera ut sig på de 10 reserverade stolarna?
(b) Om bordet är runt och vi bara är intresserade av vilka personer som var och en har till vänster och till höger om sig, vad blir antalet möjliga placeringar då?

På menyn kan man välja bland 3 olika förrätter, 3 olika varmrätter och 2 olika efterrätter.

25. På hur många olika sätt kan man komponera sin middag, genom att välja en förrätt, en varmrätt och en efterrätt?

Var och en av de 10 vännerna väljer en “komposition" (förrätt, varmrätt, efterrätt). Vi tänker oss att stolarna de sitter på är numrerade, i den serverande personalens ögon. Den som tar beställningen antecknar i nummerordning, för varje person, i en lista, vilken komposition som valts.

26. Hur många olika sådana listor kan bildas?

Från kökets perspektiv är man inte intresserad av vem som har valt vad, utan endast av hur många som valt respektive rätt bland 3 möjliga förrätter, 3 möjliga varmrätter, och 2 möjliga efterrätter. (Vi antar att var och en i sällskapet väljer en förrätt, en varmrätt och en efterrätt.)

27. Hur många beställningar är möjliga från kökets perspektiv (förklarat ovan)?

När det är dags att betala så räcker förstås inte pengarna. Man bestämmer sig för att tre (av de 10) skall gå och hämta ut mer pengar från bankomaten.

28. På hur många olika sätt kan de tre personerna väljas?

29. Hur många olika köer kan de tre utvalda bilda framför bankomaten?

När middagen är betald skall fyra personer ta sig hem. De ska åt samma håll och två av dem har cyklar. De bestämmer sig för att dela upp sig två och två på cyklarna, som vi kallar C_1 och C_2.

30. På hur många sätt kan man dela upp de fyra personerna som förare och passagerare på C_1 respektive C_2 ?

31. Om vi inte bryr oss om vem som cyklar och vem som är medpassagerare, på hur många sätt kan de fyra personerna delas upp (två-och-två) på cyklarna C_1 och C_2 ?

32. Nu bryr vi oss inte heller om vilken cykel respektive par hamnar på, utan endast av själva uppdelningen i två-och-två. På hur många sätt kan de fyra delas upp i två par?

De 6 återstående personerna väljer senare att dela på två taxibilar, kalla dem T_1 och T_2, för att ta sig hem.

33. På hur många olika sätt man dela upp de 6 personerna i tre passagerare i T_1 och tre passagerare i T_2 ?

34. På hur många sätt kan man dela upp de 6 personerna i två grupper om tre personer var? (Nu håller vi alltså inte reda på vilken bil respektive grupp tar.)

35. På hur många sätt kan man dela upp de 6 personerna i två grupper så att varje grupp innehåller mellan två och fyra personer?

Svar och i vissa fall förklaringar följer på nästa sida.

$- \oint \oint \oint -$

Svar med förklaringar i vissa fall

1. $2^5 = 32$. Vi kan tänka oss att varje siffra upptar en plats, bland fem möjliga, från vänster till höger. På varje plats kan vi göra två val – välja en etta eller en tvåa – och antalet valmöjligheter för varje ny plats (om vi går från vänster till höger, exempelvis) är oberoende av vilka val som har gjorts tidigare. Enligt multiplikationsprincipen är antalet femsiffriga tal som kan bildas med siffrorna 1 och 2 lika med $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$.

2. $2^5 = 32$.

3. 2^n.

4. 6^4. Sättet att tänka här att detsamma som i föregående uppgifter, men nu har vi 6 valmöjligheter för var och en av de 4 platserna, oberoende av vilka val som tidigare har gjorts.

5. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. På den första platsen har vi 6 valmöjligheter. På den andra platsen har vi 5 valmöjligheter, eftersom vi inte får använda den siffran som valdes på första platsen. På den tredje platsen har vi 4 valmöjligheter eftersom vi inte får använda någon av de två siffror som valdes till de två första platserna. På den fjärde platsen har vi 3 valmöjligheter, eftersom ...(fyll i själv)...

6. (a) 6^6 (b) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

7. m^n. En n-tupel har n platser/koordinater och på varje plats kan vi göra m val, oberoende av de tidigare valen. (Samma tankesätt som i 1 – 4.)

8. $m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1)) = \frac{m!}{(m-n)!}$. (Samma tankesätt som i uppgift 5, bara att m och n är godtyckliga positiva heltal så att $n \leq m$ i den här uppgiften.)

9. (a) n^n (b) $n!$.

10. $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = 35$. (Alternativt $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$.) Vi har 7 platser, från vänster till höger, som skall fyllas i med 4 ettor och 3 tvåor. När vi har valt platser för de fyra ettorna så har vi inget annat val än att låta de 3 tvåorna ta återstående platser. Antalet sätt att välja 4 platser, bland 7 möjliga, för ettorna är $\binom{7}{4}$. (Man kan lika gärna tänka sig att man väljer 3 platser, bland 7 möjliga, åt tvåorna, och sedan låter ettorna ta de återstående platserna. Då får man $\binom{7}{3}$. Men, som bekant om ni har läst kurslitteraturen, $\binom{7}{4} = \binom{7}{3}$, eftersom det alltid gäller att $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.)

11. $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} = 35 \cdot 6 = 210$. Man kan välja 3 platser, bland 7 möjliga, för ettorna på $\binom{7}{3}$ sätt. Sedan kan man, oberoende av valet av platser för ettorna, välja 2 platser, bland 4 lediga, för tvåorna på $\binom{4}{2}$ sätt. Sedan har man inget annat val än att låta de två treorna ta de återstående två platserna. (Det sistnämnda kan också formuleras som att man väljer två platser bland två möjliga, men detta kan bara göras på ett sätt, och multiplikation med ett gör ju ingen skillnad.)

12. $1 + 7 + \binom{7}{2} = 29$. Vi har tre fall: (a) talet innehåller bara ettor, eller (b) talet innehåller exakt en tvåa, eller (c) talet innehåller exakt 2 tvåor. Bara ett 7-siffrigt tal uppfyller (a). Antalet 7-siffriga tal som består av exakt en tvåa och exakt 6 ettor är $\binom{7}{1} = 7$ (för vi kan välja plats åt den enda tvåan på 7 sätt). Antalet 7-siffriga tal som består av exakt 2 tvåor och exakt 5 ettor är $\binom{7}{2}$ (för vi kan resonera som i uppgift 10). Varje 7-siffrigt tal som består endast av ettor och tvåor, och högst 2 tvåor, tillhör exakt ett av fallen – man kan säga att de tre fallen "täcker alla möjligheter och inte överlappar varandra". Därför kan vi addera ihop antalet möjligheter i de tre fallen: $1 + 7 + \binom{7}{2} = 29$.

13. 2^5.

14. 64. De enda möjligheterna för de två första siffrorna är följderna '12' och '21'. (Alltså 2 olika möjligheter att välja de två första siffrorna.) På var och en av de återstående platserna har vi 2 valmöjligheter, oberoende av valen på de övriga platserna, så det sökta antalet är $2 \cdot 2^5 = 64$.

15. $6 \cdot 2^4 = 96$. Vi tittar först på antalet sätt att välja de första tre siffrorna så att minst en etta och minst en tvåa förekommer. Sätten kan delas upp i två fall: antingen en etta och två tvåor, eller en tvåa och två ettor. I vardera fallet så finns 3 möjligheter (= antalet sätt att välja en plats bland tre möjliga). Eftersom de två fallen "täcker alla möjligheter och inte överlappar varandra" så kan vi addera dem och får $3 + 3 = 6$. Detta är alltså antalet sätt som de tre första siffrorna i det 7-siffriga talet kan väljas på. De övriga 4 siffrorna kan väljas på 2^4 sätt oberoende av hur valet av de tre första siffrorna gjordes. Det sökta antalet är därför $6 \cdot 2^4 = 96$.

16. $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$.

17. $\binom{9}{4} - \binom{6}{2} = 111$. Antalet 9-siffriga tal som kan bildas med 4 ettor och 5 tvåor är $\binom{9}{4}$. Men nu har vi räknat även de “förbjudna" fallen som börjar med 3 tvåor, så dessa måste dras av. Antalet “förbjudna" fall, som börjar med 3 tvåor, är $\binom{6}{2}$, eftersom man kan välja 2 platser, bland 6 möjliga, för de återstående två tvåorna på $\binom{6}{2}$ sätt. (Övriga platser går till ettorna.) Det sökta antalet är således $\binom{9}{4} - \binom{6}{2} = 126 - 15 = 111$.

18. $\binom{10}{3} = 120$. Det sökta antalet motsvarar antalet sätt att välja 3 platser (för nollorna), bland 10 möjliga: alltså $\binom{10}{3} = 120$.

19. $\binom{10}{3} = 120$. Antalet sätt att dela upp 7 kronor (i heltalsbelopp) på 4 personer är detsamma som antalet följder som kan bildas med 3 nollor och 7 ettor (se föregående uppgift). Hur inser man det? Jo, vi kan tänka oss att antalet ettor till vänster om den första nollan (från vänster räknat) representerar antalet kronor som person A får. Antalet ettor mellan första och andra nollan motsvarar antalet kronor som person B får. Antalet ettor mellan andra och tredje nollan motsvarar antalet kronor som person C får. Och antalet ettor till höger om den tredje nollan motsvarar antalet kronor som person D får. Med hjälp av denna "kodning" ser man att varje uppdelning av 7 kronor på personerna A, B, C och D motsvaras av exakt en följd som kan bildas med 3 nollor och 7 ettor, och omvänt.

20. $\binom{6}{3} = 20$. Vi kan tänka så här. Eftersom var och en skall få minst en krona så delar vi ut en krona åt var och en av de 4 personerna. Sedan har vi 3 kronor kvar. Dessa 3 kronor skall delas upp mellan de 4 personerna utan några restriktioner. (Alla har ju redan fått en krona.) Med samma slags resonemang som i uppgift 19 så inser man att antalet sätt att dela upp 3 kronor mellan 4 personer är lika med antalet följder av 4-1 = 3 nollor och 3 ettor; och detta antal är $\binom{3+3}{3} = \binom{6}{3} = 20$.

21. (a) 4^7.
(b) $\binom{10}{3}$. Antalet möjligheter är lika med antalet följder bestående av 3 nollor och 7 ettor. Antalet personer som väljer kurs A motsvaras av antalet ettor till vänster om första nollan,... och så vidare, ungefär som i uppgift 19; fast här har de 4 kurserna den roll som de 4 personerna hade i uppgift 19.

22. $5! = 120$. För första platsen i kön har vi 5 val. För andra platsen har vi 4 val (en person är redan vald på första platsen), på tredje platsen 3 val, osv.

23. $\binom{5}{2} = 10$. Det väsentliga är bara vilka två som blir valda för uppdraget. Vi tänker oss *inte* att de är sinsemellan ordnade (som om de bildade en kö). Två objekt kan väljas från 5 givna

på $\binom{5}{2}$ sätt.

24. (a) 10!. Kalla stolarna för $1, 2, \ldots, 10$. På stol 1 kan vi sätta vem som helst av de 10 personerna. På stol 2 kan vi sätta vem som helst av de 9 kvarvarande (stående) personerna. På stol 3 kan vi sätta vem som helst av de 8 kvarvarande personerna. Och så vidare. Eftersom antalet valmöjligheter för varje ny stol är oberoende av valen som gjorts för de tidigare stolarna så medför multiplikationsprincipen att svaret är 10!.
(b) $10!/10 = 9!$. Antalet sätt att placera ut 10 personer på tio stolar är 10!, enligt lösningen till (a)-delen. Men i tolkningen av placeringar i (b) delen så motsvarar 2 utplaceringar av de 10 personerna på 10 stolar samma bordsplacering *om och endast om* den ena utplaceringen kan fås från den andra genom att alla personerna tillsammans roterar runt bordet (medsols exempelvis) ett visst antal "steg", där ett steg motsvarar att man går till nästa stol. Det finns 10 olika rotationer runt bordet: 0 steg, 1 steg, 2 steg, ..., 9 steg. Det räcker med att vi betraktar medsols rotationer, för samma effekt som kan uppnås med en motsols rotation kan uppnås av någon medsolsrotation. Eftersom varje bordsplacering, enligt tolkningen i (b)-delen, motsvaras av exakt 10 stolsutplaceringar av de 10 personerna, så blir svaret $10!/10 = 9!$.

25. $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$.

26. 18^{10}.

27. $\binom{12}{2}\binom{12}{2}\binom{11}{1} = 66^2 \cdot 11$. Betrakta först på hur många sätt, från kökets perspektiv, som de 10 ätande kan välja förrätt, bland 3 givna. Man kan se det som antalet sätt att dela upp 10 identiska objekt i 3 märkta lådor (varje låda motsvarar en förrätt); antalet objekt i samma låda tolkas som antalet personer som får den förrätten som lådan representerar. Man kan resonera på liknande sätt som i uppgift 19, för att inse att detta antal är detsamma som antalet följder av 2 nollor och 10 ettor som man kan bilda; och detta antal är $\binom{12}{2} = 66$.

Eftersom man kunde välja bland 3 varmrätter så är antalet sätt, från kökets perspektiv, som de 10 ätande kan välja varmrätt också $\binom{12}{2} = 66$.

Och genom liknande resonemang som ovan så följer att antalet sätt, från kökets perspektiv, som de 10 ätande kan välja efterrätt är $\binom{11}{1} = 11$.

Eftersom valet av varmrätt är oberoende av valet av förrätt, och valet av efterrätt är oberoende av de tidigare valen, så kan till sist multiplikationsprincipen användas. Så antalet sätt, om man bara bryr sig om hur många som valt respektive rätt, på vilka de 10 personerna kan välja rätter är $\binom{12}{2}\binom{12}{2}\binom{11}{1} = 66^2 \cdot 11$.

28. $\binom{10}{3} = 120$.

29. $3! = 6$.

30. $4! = 24$. Föraren till C_1 kan väljas på 4 sätt. Sedan kan passageraren till C_1 väljas på 3 sätt. Sedan kan föraren till C_2 väljas på 2 sätt. Slutligen finns bara ett sätt att välja passageraren till C_2.

31. $\binom{4}{2} = 6$. Det sökta antalet motsvarar antalet sätt att välja två personer som skall färdas på C_1, eftersom de övriga två inte har annat val än att färdas på C_2. Det sökta antalet är alltså lika med antalet sätt av välja 2 objekt från 4 givna, och detta antal är $\binom{4}{2} = 6$.

32. 3. Man kan tänka på åtminstone två sätt.

Första sättet: välj en av de fyra personerna, som vi kan kalla A. Varje uppdelning av de fyra i två-och-två motsvaras av ett val av "cykelpartner" till A. Det finns 3 olika val.

Andra sättet, som använder lösningen till 31: Låt de fyra personerna betecknas A, B, C, D. Varje uppdelning i två-och-två, exempelvis $\{A, B\}$ och $\{C, D\}$ motsvarar exakt två fördelningar på cyklarna C_1 och C_2: nämligen att A och B tar C_1 och C och D tar C_2, eller omvänt.

Därför kan vi ta svaret från uppgift 31 och dividera med 2: $\binom{4}{2}/2 = 3$.

33. $\binom{6}{3} = 20$.

34. $\binom{6}{3}/2 = 10$. (Se andra sättet att lösa uppgift 32.)

35. $\binom{6}{3}/2 + \binom{6}{2} = 10 + 15 = 25$.

$\circ\!- \prec \cdots \infty \cdots \succ -\!\circ$