UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Michael Melgaard
Jörgen Östensson

Prov i matematik
Program: Datakand., Fristående
Derivator och integraler 1MA014
2008-06–11

Skrivtid: 09:00–14:00. Tillåtna hjälpmedel: Manuella skrivdon och det bifogade formelbladet. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text/figurer. Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25, respektive 32 poäng. Påbörja varje uppgift på nytt papper och skriv endast på papperets ena sida. Lycka till!

1. Beräkna gränsvärdena
(a)
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3},$$
(b)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + x\sin x + 3}{x^2 + \cos x}.$$

2.
(a) Betrakta funktionen
$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{om } x \geq 0, \\ ax+b & \text{om } x < 0. \end{cases}$$
Bestäm konstanterna a och b så att $f(x)$ blir en kontinuerlig funktion med $f(-1) = 0$. Motivera ordentligt.
(b) Använd derivatans definition för att bestämma derivatan av funktionen $g(x) = x^2 + x$.

3. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x) = x(2-x)^{1/3}$ på det slutna intervallet $[1, 3]$.

4. Beräkna integralerna
(a)
$$\int_0^2 \frac{x}{(x^2+4)^{1/3}}\,dx,$$
(b)
$$\int \sqrt{x}\ln x\,dx.$$

Var god vänd!

5. Betrakta funktionen $g(x) = x + 1 + \dfrac{4}{(x-2)^2}$.

(a) Bestäm definitionsmängd och eventuella asymptoter till g.
(b) Bestäm eventuella lokala extrempunkter till g.
(c) Rita grafen till g.

6. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{x+1}{x(x^2+1)}\, dx.$$

7. Ett område i planet begränsas av x-axeln, y-axeln, linjen $x = 2$ och kurvan $y = e^{x^2}$. Bestäm volymen av den kropp som uppstår då området roterar runt y-axeln.

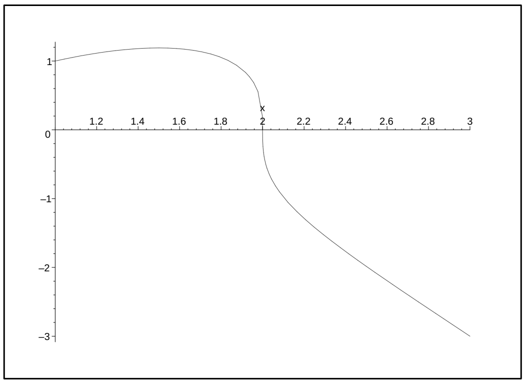
8. Man skall tillverka en låda utan lock med kvadratisk botten. Dimensionera lådan så att denna får maximal volym, givet att den totala arean av dess fem sidor är 1 m^2. Vad blir lådans maximala volym?

Svar till tentamen i Derivator och integraler 1MA014 2008-06–11

1. (a) 6 (b) 2.

2. (a) $a = b = 1$, (b) $2x + 1$.

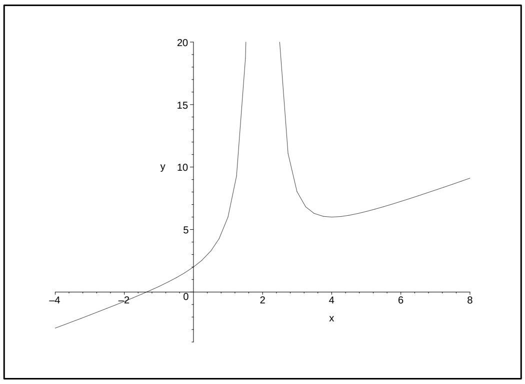
3. Största värde är $3 \cdot 2^{-4/3}$ och minsta värde är -3. I Figur 1 nedan visas grafen till funktionen f.



Figur 1: Grafen till f.

4. (a) $3 - \dfrac{3}{2^{2/3}} \approx 1.1101.$ (b) $\dfrac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \dfrac{4}{9}x^{3/2} + C.$

5. (a) Definitionsmängden ges av $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Vertikal asymptot $x = 2$. Horisontell asymptot finns inte. Sned asymptot $y = x + 1$ då $x \to \pm\infty$.
(b) Den enda lokala extrempunkten är ett lokalt minimum i $x = 4$. Terrasspunkt finns ej.
(c) Grafen till g visas i Figur 2.



Figur 2: Grafen till g.

6. $\dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{\pi}{4}.$

7. $\pi(e^4 - 1) \approx 168.4.$

8. Lådans botten skall ha sidan $1/\sqrt{3} \approx 0.5774$ m och dess höjd vara $1/(2\sqrt{3}) \approx 0.2887$ m. Lådans volym blir då $1/(6\sqrt{3}) \approx 0.09623$ m^3.

Lösningar till tentamen i Derivator och integraler 1MA014 2008-06–11

Lösning till problem 1. (a)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6.$$

(b) Det gäller att

$$\frac{2x^2+x\sin x+3}{x^2+\cos x}=\frac{2+\frac{\sin x}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{\cos x}{x^2}}.$$

Då $|\sin x|\leq 1$ och $|\cos x|\leq 1$, har vi att

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0 \text{ samt } \lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x^2}=0.$$

Så vi bestämmer gränsvärdet till

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x\sin x+3}{x^2+\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{\sin x}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{\cos x}{x^2}}=2.$$

Lösning till problem 2. (a): För att $f(x)$ skall bli kontinuerlig måste vänster- och högergränsvärdena sammanfalla i $x=0$. Eftersom e^x är kontinuerlig så ges högergränsvärdet av funktionvärdet $f(0)=e^0=1$. Vänstergränsvärdet ges av $\lim_{x\to 0^-} ax+b=b$. Alltså måste vi ha $b=1$. Dessutom skall vi ha att $f(-1)=0$ dvs $a(-1)+b=a(-1)+1=1-a=0$ som ger att $a=1$. Alltså är $a=b=1$.
(b) Vi har att $g(x)=x^2+x$. Enligt definition är derivatan av g i x

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+(x+h)-(x^2+x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+x+h-x^2-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2+h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(2x+h+1)=2x+1.
\end{aligned}$$

Lösning till problem 3. Först bestämmer vi derivatan av $f(x)$. Vi får

$$f'(x)=(2-x)^{1/3}-\frac{x}{3}(2-x)^{-2/3},\qquad \text{då } x\neq 2.$$

Kritiska punkter ges av att $f'(x)=0$, och löser därför ekvationen

$$(2-x)^{1/3}=\frac{x}{3}(2-x)^{-2/3}\Longleftrightarrow (2-x)=\frac{x}{3}\Longleftrightarrow x=3/2.$$

Vi evaluerar funktionen i den kritiska punkten $x=3/2$, i den singulära punkten $x=2$, samt i ändpunkterna $x=1$ och $x=3$:

$$\begin{aligned}
f(3/2) &= \frac{3}{2}\left(2-\frac{3}{2}\right)^{1/3}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}=\frac{3}{2^{4/3}}\approx 1.1906,\\
f(2) &= 2(2-2)^{1/3}=0,\\
f(1) &= (2-1)^{1/3}=1,\\
f(3) &= 3(2-3)^{1/3}=3(-1)^{1/3}=-3.
\end{aligned}$$

Funktionens minimum är -3 och fås då $x=3$. Maximum är $3\cdot 2^{-4/3}$ och fås då $x=3/2$.

Lösning till problem 4. (a): Vi använder substitutionmetoden:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x}{(x^2+4)^{1/3}}\,dx &= \left\{t = x^2+4,\ dt = 2x\,dx\right\} = \int_{x=0}^{x=2} \frac{dt}{2t^{1/3}} = \frac{3}{4}\left[t^{2/3}\right]_{x=0}^{x=2} \\ &= \frac{3}{4}\left[(x^2+4)^{2/3}\right]_0^2 = \frac{3}{4}\left(8^{2/3} - 4^{2/3}\right) = \frac{3}{4}\left(4 - 16^{1/3}\right) = 3 - \frac{3}{2^{2/3}} \approx 1.1101.\end{aligned}$$

(b) Vi använder partiell integration:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\ln x\,dx &= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \int \frac{2}{3}x^{3/2}\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{3}{2}x^{3/2}\ln x - \frac{2}{3}\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{4}{9}x^{3/2} + C.\end{aligned}$$

Lösning till problem 5. (a) Funktionen $g(x)$ är definierad då $x \neq 2$, d.v.s. definitionsmängden ges av $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Vi ser direkt att $g(x) - (x+1) \to 0$ då $x \to \pm\infty$, så $y = x+1$ är sned asymptot både då $x \to +\infty$ och då $x \to -\infty$. Vi ser även direkt att $g(x) \to +\infty$ då $x \to 2$, så vi har den lodräta asymptoten $x = 2$.
(b) För derivatan har vi, att

$$g'(x) = 1 - \frac{8}{(x-2)^3}.$$

Vi erhåller härav följande teckenstudium:

x		2		4	
$g'(x)$	$+$	odef.	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	odef.	$\searrow$	6	$\nearrow$

Den enda lokala extrempunkten är ett lokalt minimum i $x = 4$.
(c) Grafen till g visas i Figur 2 ovan.

Lösning till problem 6. Vi gör först en partialbråksuppdelning:

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + x(Bx+C)}{x(x^2+1)}.$$

Detta ger att

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 1 \\ A = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{cases},$$

varför

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{x+1}{x(x^2+1)}\,dx &= \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx \\ &= \left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x\right]_1^\infty \\ &= \left[\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + \arctan x\right]_1^\infty \\ &= 0 + \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Lösning till problem 7. Volymen av den rotationskropp som uppstår då området mellan $x = a, x = b$, x-axeln och funktionen $y = f(x)$ roterar runt y-axeln är

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx.$$

Vi har att $a = 0, b = 2$, och $f(x) = e^{x^2}$. Volymen blir då

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 x e^{x^2}\,dx = \left\{ t = x^2, dt = 2x\,dx, \frac{1}{2}dt = x\,dx \right\} = 2\pi \int_0^4 \frac{e^t}{2}\,dt \\ &= \pi \left[e^t\right]_0^4 = \pi(e^4 - e^0) = \pi(e^4 - 1) \approx 168.4. \end{aligned}$$

Lösning till problem 8. Låt lådans botten ha sidan x och låt dess höjd vara y. Då ges lådans volym av $V = x^2 y$ och dess totala area av $x^2 + 4xy = 1$. Det följer att $y = (1 - x^2)/(4x) = 1/(4x) - x/4$. Nu uttrycker vi volymen i enbart variabeln x och får $V = x^2 y = x^2[1/(4x) - x/4] = x/4 - x^3/4$. Det är klart att $0 < x < 1$. Vi söker extrempunkterna bland derivatans nollställen: $V' = 1/4 - 3x^2/4 = 0$ som har lösningar $x = \pm 1/\sqrt{3}$. Vi kan såklart bortse från den negativa lösningen. Eftersom $V'' = -3x/2 < 0$ då $x > 0$ så har vi ett maximum. Då $x = 1/\sqrt{3}$ blir $y = 1/(2\sqrt{3})$. Den maximala volymen blir då $x^2 y = 1/(6\sqrt{3}) \approx 0.09623$. Sammanfattningsvis: Lådans botten skall ha sidan $1/\sqrt{3} \approx 0.5774$ m och dess höjd skall vara $1/(2\sqrt{3}) \approx 0.2887$ m. Lådans volym blir då $1/(6\sqrt{3}) \approx 0.09623$ m^3.