UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen

Svar till duggan.

1. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x\to 3} \frac{3x - x^2}{x^2 - 9}$.

Svar. Vi har

$$\lim_{x\to 3} \frac{3x - x^2}{x^2 - 9} = \lim_{x\to 3} \frac{-x(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{-x}{(x+3)} = \frac{-3}{3+3} = -\frac{1}{2}.$$

Svar: $-\frac{1}{2}$.

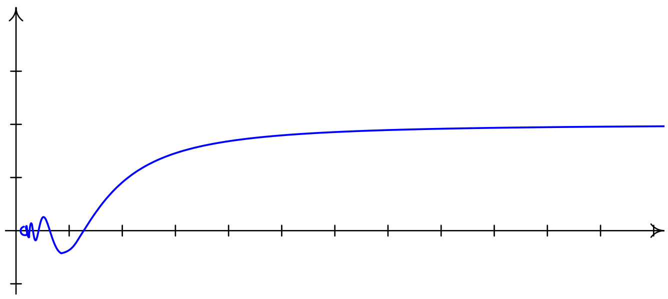
$\square$

2. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} \sin \frac{4}{x}$.

Svar. Med substitutionen $t = \frac{4}{x}$ får vi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} \sin \frac{4}{x} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2}{t} \sin t = 2 \cdot \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Svar: 2.

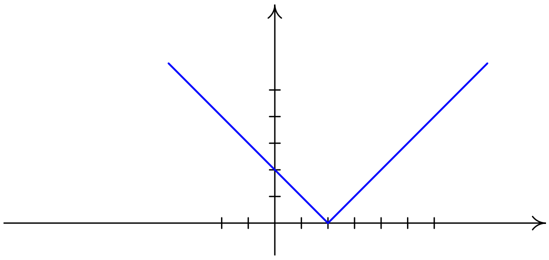


$y = \frac{x}{2} \sin \frac{4}{x}$ för $x > 0.15$. Avståndet mellan markeringarna är 1.

$\square$

3. Ange en kontinuerlig funktion $f(x)$, $0 \le x \le 5$, som *inte* är deriverbar för $x = 2$. Skissa kurvan $y = f(x)$. Var noggrann i närheten av $x = 2$. (2)

Svar. T ex funktionen $f(x) = |x - 2|$. Funktionen f är kontinuerlig, men f är inte deriverbar i punkten $x = 2$ eftersom den har ett hörn där.



$y = |x - 2|.$

$\square$

4. Derivera $f(x) = \arctan \sqrt{x^2 - 1}$, $x > 1$. (2)

Svar. Kedjeregeln ger

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x^2 - 1)} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Svar: $f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

$\square$

För uppgifterna 5, 6 och 7, låt $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$.

5. Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan $y = f(x)$ i den punkt där $x = 1$.

Svar. Funktionen är definierad för $x \neq 0$ och har derivatan

$$f'(x) = 4 - \frac{1}{x^2}.$$

Tangentens lutning blir $f'(1) = 3$. Eftersom $f(1) = 5$, så går tangenten genom punkten $(1, 5)$. En ekvation för tangenten är alltså

$$y - 5 = 3(x - 1),$$

som kan förenklas till $y = 3x + 2$.
Svar: En ekvation för tangentlinjen är $y = 3x + 2$.

$\square$

6. Bestäm alla asymptoter till kurvan $y = f(x)$.

Svar. Vi undersöker först hur det ser ut nära $x = 0$. Eftersom $\lim_{x\to 0^+} \left(4x + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ och $\lim_{x\to 0^-} \left(4x + \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$, så är linjen $x = 0$ en lodrät asymptot.
Undersök nu om det finns någon sned asymptot: Direkt ur f:s definition ser vi att $f(x) - 4x = \dfrac{1}{x}$, och alltså gäller att

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 4x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

vilket innebär att linjen med ekvationen $y = 4x$ är en sned asymptot åt både vänster och höger.
Svar: Linjen $x = 0$ är en lodrät asymptot, och linjen $y = 4x$ är en sned asymptot. $\square$

7. Skissa kurvan $y = f(x)$.
Ange särskilt extrempunkter och intervall där kurvan är konvex/konkav.

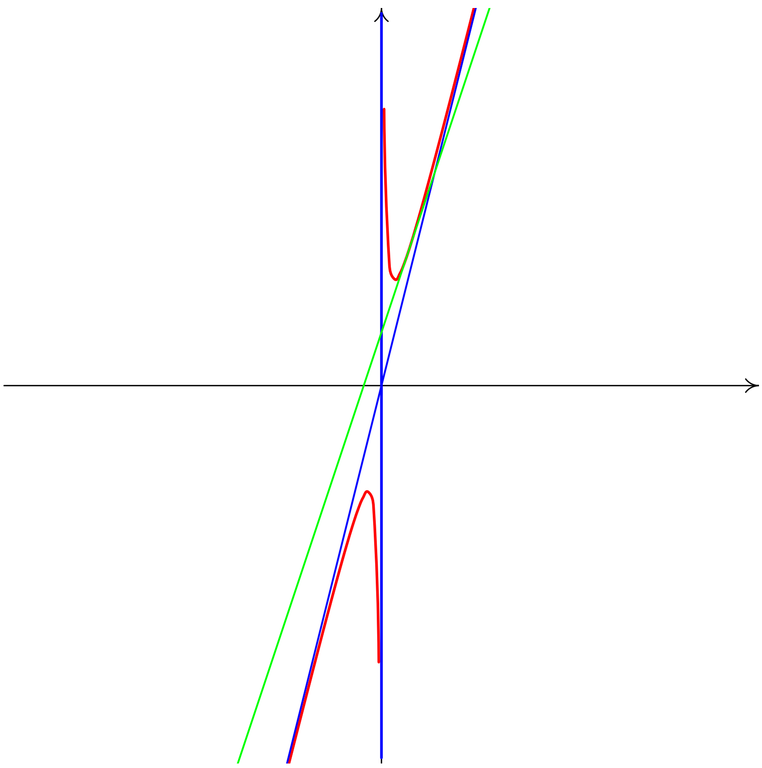
Svar. Funktionens andraderivata ges av $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Vi ser att $f''(x) < 0$, då $x < 0$, och $f''(x) > 0$, då $x > 0$. Alltså är kurvan $y = f(x)$ konkav till vänster om 0 och konvex till höger om 0.

Vi ser av derivatan $f'(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$ i uppgift 5 att $f'(x) = 0$ om och endast om $x = \pm\frac{1}{2}$.
Teckenstudietabell:

x		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	odef.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	odef.	$\searrow$	4	$\nearrow$

Kurvan är alltså strängt växande för $x \le -\frac{1}{2}$ och för $x \ge \frac{1}{2}$, och strängt avtagande i intervallen $[-\frac{1}{2}, 0)$ och $(0, \frac{1}{2}]$. (Men obs: Kurvan är inte strängt avtagande i $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.)

Kurvan $y = f(x)$ har ett lokalt (men ej globalt) minimum då $x = \frac{1}{2}$ ($f(\frac{1}{2}) = 4$), och ett lokalt maximum då $x = -\frac{1}{2}$ ($f(-\frac{1}{2}) = -4$). Vi avslutar med en kurvskiss, där även asymptoterna lagts in:



$y = 4x + \frac{1}{x}$ (röd), asymptoterna $x = 0$ och $y = 4x$ (blå) samt tangenten $y = 3x + 2$ (grön).

$\square$

8. Bestäm Maclaurinpolynomet av ordning 3 till funktionen $f(x) = \frac{1+x}{e^x}$.

Svar. Vi ska alltså bestämma polynomet

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2}f''(0)x^2 + \tfrac{1}{6}f'''(0)x^3.$$

Observera att man kan använda den kända utvecklingen för e^t, t nära 0:
Eftersom $e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{6} + O(t^4)$, nära $t = 0$, så gäller

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + O(x^4)$$

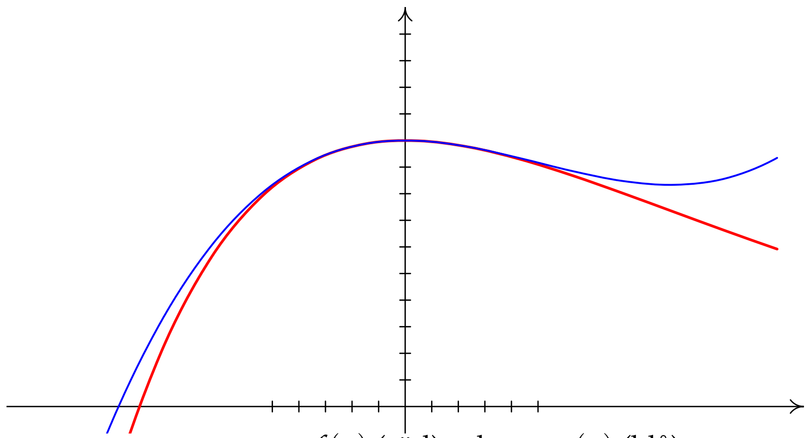
nära $x = 0$. Nu får vi

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)e^{-x} = (1+x)\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + O(x^4)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4). \end{aligned}$$

Av entydighetssatsen för Maclaurinutvecklingar följer det nu att

$$p(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Svar: Maclaurinpolynomet av ordning 3 är $p(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3$.



$y = f(x)$ (röd) och $y = p(x)$ (blå).

□

9. Låt $f(x) = e^{1-2x}$. Visa att f är inverterbar.
Beräkna därefter $g'(1)$, där g är inversen till f, dvs $g(x) = f^{-1}(x)$. (2)

Svar. Funktionens derivata är $f'(x) = -2e^{1-2x}$. Det fäljer att $f'(x) < 0$ för alla x. Därför är funktionen strängt avtagande, vilket medför att f är inverterbar. För inversens derivata gäller att

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} \quad \text{där} \quad b = f(a).$$

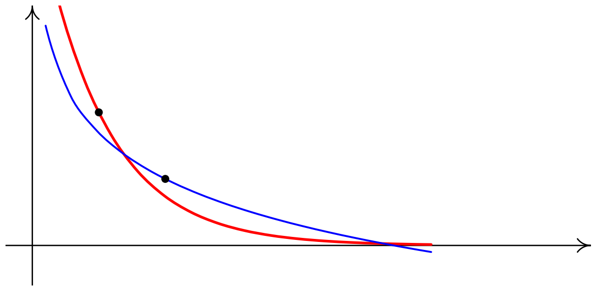
I detta fall har vi $b = 1$. Vi söker alltså a sådant att

$$e^{1-2a} = 1.$$

Vi måste ha $1 - 2a = 0$, vilket ger att $a = \frac{1}{2}$. Vi har $f'(a) = f'(\frac{1}{2}) = -2e^0 = -2$, och alltså gäller

$$g'(1) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

Svar: $-\frac{1}{2}$.



$y = \exp(1 - 2x)$ (röd) och dess invers (blå).

□

10. Ordna följande funktioner efter hur snabbt de växer då x går mot ∞. Börja med den funktion som växer långsammast. Endast svar krävs.

$$x^4 \ln x^9, \qquad 3^{2x}, \qquad 2^{3x}, \qquad x^5$$

(2)

Svar. Eftersom $\ln x$ växer långsammare än x, så växer $x^4 \ln x^9 = 9x^4 \ln x$ långsammare än x^5. Potenserna kan skrivas $3^{2x} = \left(3^2\right)^x = 9^x$ och på samma sätt $2^{3x} = 8^x$. Eftersom polynom växer långsammare än potenser så för vi ordningen $x^4 \ln x^9$, x^5, 2^{3x}, 3^{2x}.
Svar: $x^4 \ln x^9$, x^5, 2^{3x}, 3^{2x}.

□