

Skrivtid: 14.00 - 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och bifogat formelblad. För betyget 3 krävs 18 poäng (av 24) på del A. För betyget 4 krävs 18 poäng på del A och 25 poäng totalt. För betyget 5 krävs 18 poäng på del A och 32 poäng totalt. Gör inte de stjärnmärkta uppgifterna om du klarat duggan.

Del A

1* Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$ i punkten där $x = 2$. (2)

2* Bestäm, om det existerar, gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 4x + 5}{6x^3 + x^2 + 7} \quad (2)$$

3* Bestäm $f'(-e)$ om $f(x) = e^{-x}|x|^x$. (2)

4. Bestäm, om det existerar, gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 6 \sin x + \arctan 3x}{x - x \cos x} \quad (2)$$

genom att Maclaurinutveckla de ingående funktionerna. (2)

5. Avgör om

$$1 = \int_{-1}^1 \frac{e^x dx}{e^x + 1} \quad (2)$$

6. Beräkna integralen

$$\int_0^\pi (\pi - x) \cos \frac{x}{2} dx. \quad (2)$$

7. Beräkna integralen

$$\int \frac{x-2}{x^2+2x} dx. \quad (2)$$

8. Lös differentialekvationen $\sqrt{x}y' + y = 1$, $y(0) = 2$. (2)

9. Lös differentialekvationen $y'e^x = xy^2$ med begynnelsevillkoret $y(0) = 1$. (2)

10. Lös differentialekvationen $y'' - y' - 2y = x + 1$. (2)

11. Avgör konvergensen hos serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sqrt{n} + \ln n}{n^3 + \ln(n^4)} \quad (2)$$

12. Låt $f(x) = 1 + 4x^3 + \ln \sqrt{x}$, $x > 0$.
Visa att f är inverterbar samt bestäm $(f^{-1})'(5)$, dvs inversens derivata i punkten 5. (2)

Del B

13. Låt D vara området i xy -planet som ges av $\cos x \leq y \leq \sin x$, $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Beräkna volymen av den kropp som genereras då D roterar kring
(a) x -axeln, (b) y -axeln. (4)
14. Rita kurvan $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$. Bestäm extrempunkter och asymptoter.
Ange intervall där kurvan är konvex eller konkav. (4)
15. För funktionen f gäller att $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$ för $x < 0$, medan $f(x) = ax + b$ för $x \geq 0$.
Bestäm konstanterna a och b så att f blir kontinuerlig och deriverbar överallt. (4)
16. En likbent triangel har hörnen på ellipsen $4x^2 + y^2 = 4$ så att spetsen (där de lika benen möts) ligger i punkten $(-1, 0)$. Bestäm största möjliga arean av en sådan triangel. (4)

Trigonometriska formler

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\end{aligned}$$

Maclaurinutvecklingar

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + O(x^{2m+1}) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + O(x^{2m+2}) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1}) \\ \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + O(x^{2n+1}) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + O(x^{n+1})\end{aligned}$$