

Svar till tentan 2011-03-11.

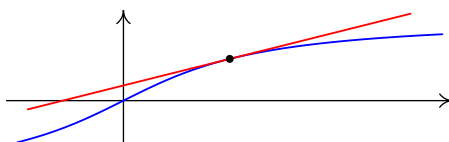
Del A

- 1* Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x) = \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$ i punkten där $x = 2$.

Lösning. En ekvation för tangenten till $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$ är, som bekant, $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Här har vi $a = 2$, $f(2) = \frac{\pi}{4}$ och

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \frac{1}{2} = \frac{2}{4 + x^2}, \quad f'(2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

En ekvation för tangenten är alltså $y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(x - 2)$.



□

- 2* Bestäm, om det existerar, gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 4x + 5}{6x^3 + x^2 + 7}$$

Lösning. Vi förlänger med x^{-3} och får

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \frac{2x^3 - 4x + 5}{6x^3 + x^2 + 7} = \frac{2 - 4/x^2 + 5/x^3}{6 + 1/x + 7/x^3} \right\} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

□

- 3* Bestäm $f'(-e)$ om $f(x) = e^{-x}|x|^x$. (2)

Lösning. Här behövs det logaritmisk derivering. Vi har

$$f(-e) = e^e e^{-e} = 1, \quad \ln |f(x)| = \ln f(x) = -x + x \ln |x|,$$

$$D \ln |f(x)| = -1 + x \frac{1}{x} + \ln |x| = \ln |x|, \quad f'(x) = f(x) \ln |x|, \quad f'(-e) = f(-e) \ln e = 1.$$

Svar. $f'(-e) = 1$.

□

4. Bestäm, om det existerar, gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 6 \sin x + \arctan 3x}{x - x \cos x}$$

genom att Maclaurinutveckla de ingående funktionerna.

Lösning. För täljaren och nämnaren har vi utvecklingarna

$$T = 3x - 6 \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \right) + \left(3x - \frac{27x^3}{3} + O(x^5) \right) = -8x^3 + O(x^5)$$

respektive

$$N = x - x \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \right) = \frac{x^3}{2} + O(x^5)$$

Detta ger oss

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{3x - 6 \sin x + \arctan 3x}{x - x \cos x} = \frac{-8x^3 + O(x^5)}{\frac{x^3}{2} + O(x^5)} = \frac{-8 + O(x^2)}{\frac{1}{2} + O(x^2)} \right\} = \frac{-8}{\frac{1}{2}} = -16$$

Svar. Gränsvärdet är -16 . □

5. Avgör om

$$1 = \int_{-1}^1 \frac{e^x dx}{e^x + 1} = I.$$

Lösning. Substitutionen $u = e^x$, $du = e^x dx$, ger

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=-1}^{x=1} \frac{e^x dx}{e^x + 1} = \int_{u=e^{-1}}^{u=e} \frac{du}{u + 1} \\ &= [\ln |u + 1|]_{u=e^{-1}}^{u=e} = \ln(e + 1) - \ln(e^{-1} + 1) \\ &= \ln \frac{e + 1}{e^{-1} + 1} = \ln \frac{e(e + 1)}{e(e^{-1} + 1)} = \ln \frac{e(e + 1)}{1 + e} = \ln e = 1 \end{aligned}$$

Påståendet att $1 = I$ är alltså sant. □

6. Beräkna integralen

$$I = \int_0^\pi (\pi - x) \cos \frac{x}{2} dx. \quad (2)$$

Lösning. Med partiell integration får vi

$$\begin{aligned} I &= [(\pi - x)2 \sin \frac{x}{2}]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi (-1)2 \sin \frac{x}{2} dx \\ &= 0 - 0 - [4 \cos \frac{x}{2}]_{x=0}^{x=\pi} = -(4 \cos \frac{\pi}{2} - 4 \cos 0) = 4. \end{aligned}$$

Svar. $I = 4$. □

7. Beräkna integralen

$$I = \int \frac{x - 2}{x^2 + 2x} dx.$$

Lösning. Vi partialbråksutvecklar funktionen:

$$\frac{x-2}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+2A}{x(x+2)} \implies A = -1, \quad B = 2.$$

Detta ger oss

$$I = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x+2} \right) dx = C - \ln|x| + 2 \ln|x+2|.$$

□

8. Lös differentialekvationen $\sqrt{x}y' + y = 1$, $y(0) = 2$.

Lösning. Ekvationen, som är linjär av första ordningen, har standardformen

$$y' + x^{-\frac{1}{2}}y = x^{-\frac{1}{2}}$$

Vi har $g(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $G(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$. Den integrerande faktorn är alltså

$$e^{G(x)} = e^{2x^{\frac{1}{2}}}$$

Efter multiplikation med den integrerande faktorn kan ekvationen skrivas

$$\frac{d}{dx} \left[e^{2x^{\frac{1}{2}}} y \right] = x^{-\frac{1}{2}} e^{2x^{\frac{1}{2}}}$$

Integration av båda leden ger

$$\begin{aligned} e^{2x^{\frac{1}{2}}} y &= \int x^{-\frac{1}{2}} e^{2x^{\frac{1}{2}}} dx = (u = 2x^{\frac{1}{2}}, du = x^{-\frac{1}{2}} dx) \\ &= \int e^u du = e^u + C = e^{2x^{\frac{1}{2}}} + C \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen är alltså

$$y = 1 + C e^{-2x^{\frac{1}{2}}}$$

Begynnelsevillkoret ger

$$2 = y(0) = 1 + C \implies C = 1.$$

Svar. $y = 1 + e^{-2x^{\frac{1}{2}}}$.

□

9. Lös differentialekvationen $y'e^x = xy^2$ med begynnelsevillkoret $y(0) = 1$.

Lösning. Genom omskrivning av den separabla ekvationen får vi

$$\frac{dy}{dx} = x e^{-x} y^2, \quad y^{-2} dy = x e^{-x} dx, \quad -y^{-2} dy = -x e^{-x} dx$$

Lösningen ges därför av

$$\int -y^{-2} dy = \int -x e^{-x} dx, \quad y^{-1} = x e^{-x} - \int (1) e^{-x} dx = (x+1)e^{-x} + C$$

Den allmänna lösningen är alltså

$$y = \frac{1}{(x+1)e^{-x} + C}$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger

$$1 = y(0) = \frac{1}{1+C} \implies C = 0.$$

Svar. $y = (x+1)^{-1}e^x$. □

10. Lös differentialekvationen $y'' - y' - 2y = x + 1$ (IH).

Lösning. Karakteristiska ekvationen $0 = r^2 - r - 2 = (r+1)(r-2)$ har rötterna $r_1 = -1$, $r_2 = 2$. Motsvarande homogena differentialekvation $y'' - y' - 2y = 0$ har därför lösningen

$$y = y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

Eftersom högerledet i (IH) är ett förstgradspolynom ansätter vi som partikulärlösning $y = y_p = ax + b$, $y' = a$, $y'' = 0$ och får

$$x + 1 = 0 - a - 2(ax + b) = -2ax - (a + 2b), \quad -1 = 2a, \quad -1 = a + 2b,$$

$$\implies a = -\frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1+a}{2} = -\frac{1}{4}, \quad y_p = -\frac{2x+1}{4}.$$

Allmänna lösningen till (IH) ges därför av

$$y = y_p + y_h = -\frac{2x+1}{4} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

□

11. Avgör konvergens hos serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sqrt{n} + \ln n}{n^3 + \ln(n^4)}$$

Lösning. För att göra en uppskattning av storleksordningen av termen $a_n = \frac{n^2 \sqrt{n} + \ln n}{n^3 + \ln(n^4)}$ så observerar vi först att $\ln(n^4) = 4 \ln n$ och eftersom logaritmen växer långsammare än polynom så blir den dominerande termen i täljaren $n^2 \sqrt{n}$ och den dominerande termen i nämnaren är n^3 . Därför uppskattar vi att a_n har samma storleksordning som $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är divergent, eftersom den är en p -serie med $p = \frac{1}{2} < 1$. Vi undersöker därför kvoten

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{n}(n^2\sqrt{n} + \ln n)}{n^3 + 4\ln n} = \frac{n^3 \left(1 + \frac{\ln n}{n^2\sqrt{n}}\right)}{n^3 \left(1 + \frac{4\ln n}{n^3}\right)} = \frac{1 + \frac{\ln n}{n^2\sqrt{n}}}{1 + \frac{4\ln n}{n^3}} \rightarrow 1, \text{ då } n \rightarrow \infty.$$

Eftersom $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1 > 0$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är divergent, så ger kvotformen av jämförelsesatsen (Gränstestet) att serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är divergent.

Svar. Serien är divergent. □

12. Låt $f(x) = 1 + 4x^3 + \ln \sqrt{x}$, $x > 0$.

Visa att f är inverterbar samt bestäm $(f^{-1})'(5)$, dvs inversens derivata i punkten 5.

Lösning. Vi har $f(x) = 1 + 4x^3 + \ln \sqrt{x} = 1 + 4x^3 + \frac{1}{2} \ln x$ och $f'(x) = 12x + \frac{1}{2x} > 0$ för alla $x > 0$. Det följer att f är strängt växande, och alltså har f invers. Vi har $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(a)}$, där $f(a) = 5$. Eftersom $f(1) = 5$ så är $a = 1$, och vi får

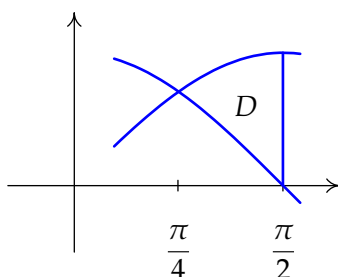
$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{25/2} = \frac{2}{25}.$$

□

Del B

13. Låt D vara området i xy -planet som ges av $\cos x \leq y \leq \sin x$, $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Beräkna volymen av den kropp som genereras då D roterar kring
(a) x -axeln, (b) y -axeln.

Lösning. Börja med att skissa området D .



(a) Kroppen som bildas då D roteras kring x -axeln har enligt skivformeln volymen

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin^2 x - \cos^2 x) dx = -\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \\ &= -\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 2x dx = -\frac{\pi}{2} [\sin 2x]_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2} (0 - 1) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(b) Vid rotation runt y -axeln använder vi skalformeln:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} x(\sin x - \cos x) dx = [\text{partiell integration}] \\ &= 2\pi [x(-\cos x - \sin x)]_{\pi/4}^{\pi/2} + 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos x + \sin x) dx \\ &= 2\pi \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \right) + 2\pi [\sin x - \cos x]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \pi^2 \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 2\pi(1 - 0) = \pi^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) + 2\pi. \end{aligned}$$

Svar. (a) $\frac{\pi}{2}$. (b) $\pi^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) + 2\pi$. □

14. Rita kurvan $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$. Bestäm extrempunkter och asymptoter.

Ange intervall där kurvan är konvex eller konkav.

Lösning. Eftersom $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} y = -\infty$ så är linjen $x = -1$ en lodrät asymptot nedåt

på båda sidor. Med polynomdivision får vi $y = x - 2 + \frac{3x+2}{(x+1)^2}$. Eftersom $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y -$

$(x - 2)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x+2}{x^2+2x+1} = 0$, så är linjen $y = x - 2$ en sned asymptot till kurvan.

Derivering ger

$$y' = \frac{3x^2(x+1)^2 - x^3 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3},$$

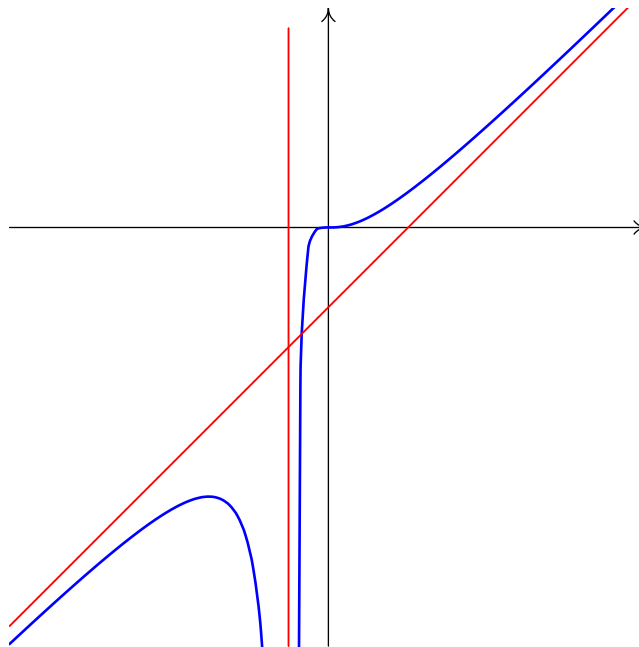
så de stationära punkterna är $x = 0$ och $x = -3$. Teckenstudietabell:

x	-3		-1	0	
y'	+	0	-	+	0
y	↗	max	↘	↗	terrass

Vi ser att $x = -3$ är en lokal maxpunkt med värde $y(-3) = -\frac{27}{4}$ och att $x = 0$ är en terrasspunkt med värdet $y(0) = 0$. Vi avslutar med att undersöka konvexitet. Derivatan kan skrivas $y' = (x^3 + 3x^2)(x+1)^{-3}$ som vi deriverar med produktregeln:

$$\begin{aligned} y'' &= (3x^2 + 6x)(x+1)^{-3} - 3(x+1)^{-4}(x^3 + 3x^2) \\ &= 3x(x+1)^{-4} ((x+2)(x+1) - (x^2 + 3x)) = \frac{6x}{(x+1)^4}. \end{aligned}$$

Alltså är andraderivatan positiv för $x > 0$ och negativ för $x < 0$, vilket innebär att funktionen är konvex för $x > 0$ och konkav för $x < 0$.



□

15. För funktionen f gäller att $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$ för $x < 0$, medan $f(x) = ax + b$ för $x \geq 0$. Bestäm konstanterna a och b så att f blir kontinuerlig och deriverbar överallt.

Lösning. Funktionen är kontinuerlig och deriverbar för alla $x \neq 0$. Vi behöver undersöka $x = 0$. Funktionsvärdet vid $x = 0$ är b . Alltså krävs att $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = b$. Då högergränsvärdet redan är klart $= b$, så behöver vi undersöka vänstergränsvärdet. Eftersom

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$$

enligt ett känt standardgränsvärde, så krävs alltså $b = 3$.

För att undersöka deriverbarhet, observera att deriverbarhet medför kontinuitet, så vi vet redan att $b = 3$, och alltså att $f(0) = 3$. Vi undersöker differenskvoten från vänster sida, dvs $h < 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\sin 3h}{h} - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sin 3h - 3h}{h^2} = [\text{Maclaurinutv.}] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3h - \frac{27h^3}{6} + \mathcal{O}(h^5) - 3h}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{27h}{6} + \mathcal{O}(h^3)}{1} = 0 \end{aligned}$$

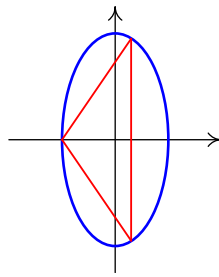
Eftersom högerderivatan är a så krävs därför att $a = 0$.

Svar. För kontinuitet krävs $b = 3$. För deriverbarhet krävs $a = 0$ och $b = 3$.

□

16. En likbent triangel har hörnen på ellipsen $4x^2 + y^2 = 4$ så att spetsen (där de lika benen möts) ligger i punkten $(-1, 0)$. Bestäm största möjliga arean av en sådan triangel.

Lösning. Triangelns spets ligger i punkten $(-1, 0)$. Triangelns bas är $2y$, och dess höjd är avståndet mellan x och -1 på x -axeln, och är därför $x + 1$. (Höjden är längs x -axeln.)



Den övre delen av ellipsen är funktionen $y = 2\sqrt{1-x^2}$. För $-1 < x < 1$ får vi därför följande uttryck för arean av hela triangeln:

$$A(x) = \frac{2y(x+1)}{2} = y(x+1) = 2(x+1)\sqrt{1-x^2}.$$

Vi deriverar med produktregeln:

$$\begin{aligned} A'(x) &= 2\sqrt{1-x^2} + 2(x+1) \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-x^2) - 2x(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{2(1-x-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-2x)(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-2x)\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}}. \end{aligned}$$

Stationära punkter är $x = \frac{1}{2}$ och $x = -1$. Teckenstudietabell:

x	-1		$1/2$	
$A'(x)$	0	+	0	-
$A(x)$	0	↗	max	↘

Arean blir alltså störst när $x = \frac{1}{2}$. Då blir arean $A(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{3/4} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

□