

Tentamenstid: 5 timmar. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. För betyget 3 krävs 18 poäng (av 24) på del A. För betyget 4 krävs 18 poäng på del A och 25 poäng totalt. För betyget 5 krävs 18 poäng på del A och 32 poäng totalt. Gör inte de stjärnmärkta uppgifterna om du klarat duggan.

Del A

- 1*. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = |x^2 - 5|$ i punkten där $x = 2$. Skissa kurvan. (2)

- 2*. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{e^x - x - x^2 - \cos x}$$

genom att Maclaurinutveckla de ingående funktionerna. (2)

- 3*. Bestäm $f'(-2)$ om $f(x) = |x + 1|^{x+1}$. (2)

4. Beräkna integralen

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$$

(2)

5. Beräkna integralen

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$$

(2)

6. Beräkna integralen

$$\int \frac{4}{x^2(x+2)} dx.$$

(2)

7. Visa att funktionen $f(x) = x^2 - x + 1$ har ett minsta värde, men saknar största värde, på intervallet $-1 < x \leq 1$. (2)

8. Lös differentialekvationen $xy' - y = x^3 e^{x^2}$. (2)

9. Lös differentialekvationen $\sqrt{y} y' = 4xy + 2y$, $y(0) = 1$. (2)

10. Lös differentialekvationen $4y'' + 4y' + y = e^{-x}$. (2)

11. Avgör konvergens hos serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$$

(2)

12. Låt $f(x) = 3x^2 + \ln x^3$, $x > 0$.
Visa att f är inverterbar samt bestäm $(f^{-1})'(3)$, dvs inversens derivata i punkten 3. (2)

Del B

13. Låt D vara det område i xy -planet som begränsas av kurvan $y = \ln x$, x -axeln och linjerna $x = 1$ och $x = e$. Beräkna volymen av den kropp som genereras då D roterar kring
(a) x -axeln,
(b) y -axeln. (4)
14. Rita kurvan $y = \frac{4+x}{2+|x|}$. Beräkna extremvärden och asymptoter. Ange intervall där kurvan är konvex eller konkav. (4)
15. Ett skåp har hyllor i form av halvcirklar med radie R på avståndet a från varandra. Bestäm volymen av den största rektangulära box som får plats på en hylla. Hur stor del av den tillgängliga volymen mellan två hyllor fyller denna box? (4)
16. För funktionen f gäller att $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ för $x > 0$, medan $f(x) = ax + b$ för $x \leq 0$. Bestäm konstanterna a och b så att f blir kontinuerlig och deriverbar överallt. (4)