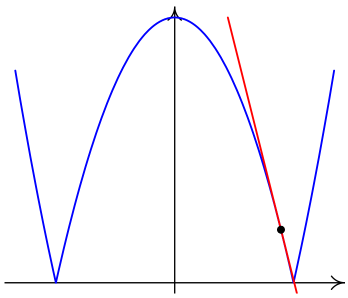
Svar till övningstentan.

Del A

1*. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x) = |x^2 - 5|$ i punkten där $x = 2$. Skissa kurvan.

Svar. I närheten av $x = 2$ gäller att $f(x) = 5 - x^2$, $f(2) = 1$, $f'(x) = -2x$, $f'(2) = -4$. Tangenten har därför ekvationen $y = 1 - 4(x-2) = 9 - 4x$.



$\square$

2*. Bestäm gränsvärdet

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{e^x - x - x^2 - \cos x}$$

genom att Maclaurinutveckla de ingående funktionerna.

Svar. Vi får

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{x - (x - x^3/6 + O(x^5))}{(1 + x + x^2/2 + x^3/6) - x - x^2 - (1 - x^2/2 + O(x^4))} \right. \\ &= \left. \frac{x^3/6 + O(x^5)}{(x^3/6) + O(x^4))} = \frac{1 + O(x^2)}{1 + O(x)} \right\} \\ &= \frac{1+0}{1+0} = 1 \end{aligned}$$

$\square$

3*. Bestäm $f'(-2)$ om $f(x) = |x+1|^{x+1}$.

Svar. Vi har $f(-2) = 1$ och $\ln|f(x)| = (x+1)\ln|x+1|$. Logaritmisk derivering ger

$$f'(x) = f(x)\left\{D\ln|f(x)| = \frac{x+1}{x+1} + \ln|x+1|\right\} = f(x)(1+\ln|x+1|)$$

Alltså har vi $f'(-2) = 1$. □

4. Beräkna integralen

$$I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$$

Svar. Vi gör substitutionen $u = \sqrt{x},\ x = u^2,\ dx = 2u\,du$ och får

$$I = \int \frac{2u\,du}{u^2+u} = \int \frac{2\,du}{u+1} = C + 2\ln(u+1) = C + 2\ln(1+\sqrt{x})$$

□

5. Beräkna integralen

$$I = \int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Svar. Partiell integration ger

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 x^{-\frac{1}{2}}\ln x\,dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\ln x\right]_{x=1}^{x=2} - \left\{\int_1^2 2x^{\frac{1}{2}}x^{-1}\,dx\right. \\ &= \left.\int_1^2 2x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[4x^{\frac{1}{2}}\right]_{x=1}^{x=2} = 4(\sqrt{2}-1)\right\} \\ &= 2\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{2} + 4 \end{aligned}$$

□

6. Beräkna integralen

$$\int \frac{4}{x^2(x+2)}\,dx.$$

(2)

Svar. Vi partialbråksutvecklar integranden:

$$\begin{aligned} \frac{4}{x^2(x+2)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2} = \frac{Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2}{x^2(x+2)} \\ &= \frac{(A+C)x^2 + (2A+B)x + 2B}{x^2(x+2)} \end{aligned}$$

och får ekvationssystemet $0 = A + C, 0 = 2A + B, 4 = 2B$ med lösningen $A = -1$, $B = 2$, $C = 1$. Alltså har vi

$$\frac{4}{x^2(x+2)} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x+2}$$

från vilket följer att

$$\int \frac{4}{x^2(x+2)}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x+2}\right)dx = C - \ln|x| - \frac{2}{x} + \ln|x+2|.$$

□

7. Visa att funktionen $f(x) = x^2 - x + 1$ har ett minsta värde, men saknar största värde, på intervallet $-1 < x \leq 1$.

Svar. Vi har $f'(x) = 2x - 1 = 0$ då $x = \frac{1}{2}$ och får teckentabellen

x	-1^+		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	-3^+	$-$	0	$+$	1
$f(x)$	3^-	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1

Av denna framgår att $y = f(x)$ antar minimum $y = \frac{3}{4}$, då $x = \frac{1}{2}$, och att värdemängden är $\frac{3}{4} \leq y < 3$. Något maximum antas alltså inte. $\square$

8. Lös differentialekvationen $xy' - y = x^3 e^{x^2}$.

Svar. Det är här fråga om en linjär differentialekvation av första ordningen med standardformen

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2 e^{x^2}$$

Vi har $g(x) = -x^{-1}$, $G(x) = -\ln x = \ln x^{-1}$ så en integrerande faktor är $\exp(G(x)) = \exp(\ln x^{-1}) = x^{-1}$. Efter det att ekvationen multiplicerats med den integrerande faktorn kan den skrivas

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-1}y\right] = x^{-1}x^2 e^{x^2} = x\,e^{x^2}$$

Lösningen till den sista ekvationen ges av

$$x^{-1}y = \int x\,e^{x^2}dx = \tilde{C} + \tfrac{1}{2}\,e^{x^2}$$

Alltså har vi

$$y = \frac{x}{2}\left(C + e^{x^2}\right)$$

$\square$

9. Lös differentialekvationen $\sqrt{y}\,y' = 4xy + 2y, \quad y(0) = 1$.

Svar. Ekvationen är separabel och lösningen ges av

$$2y^{\frac{1}{2}} = \int y^{-\frac{1}{2}}dy = \int 2(2x+1)\,dx = 2(x^2 + x + C)$$

Alltså

$$y = \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (x^2 + x + C)^2$$

Här ska även gälla att

$$1 = y(0)^{\frac{1}{2}} = 0^2 + 0 + C = C$$

Lösningen är alltså $y = (x^2 + x + 1)^2$. $\square$

10. Lös differentialekvationen $4y'' + 4y' + y = e^{-x}$ (IH).

Svar. Motsvarande homogena ekvation $4y'' + 4y' + y = 0$ har den karakteristiska ekvationen $0 = 4r^2 + 4r + 1 = (2r+1)^2$, med rötterna $r_1 = r_2 = -\frac{1}{2}$. Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är därför $y_h = (Ax + B)\, e^{-\frac{1}{2}x}$. För en partikulärlösning gör vi ansatsen $y = y_p = a\, e^{-x}$, $y' = -a\, e^{-x}$, $y'' = a\, e^{-x}$, vilket ger

$$e^{-x} = 4y'' + 4y' + 4y = (4a - 4a + a)\, e^{-x} = a\, e^{-x}$$

Alltså har vi $a = 1$, $y_p = e^{-x}$. Allmänna lösningen till (IH) är

$$y = y_p + y_h = e^{-x} + (Ax + B)\, e^{-\frac{1}{2}x}$$

□

11. Avgör konvergensen hos serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$$

Svar. Konjugatförlängning ger

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n} = \frac{2}{n\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)} = \frac{2}{n\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}.$$

Vi väljer därför att försöka jämföra med serien $\sum b_n$ där $b_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Denna serie är konvergent eftersom $\dfrac{3}{2} > 1$. Vi har

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} = \frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} \longrightarrow \frac{2}{1+1} = 1,$$

då $n \to \infty$. Eftersom $1 < \infty$ och $\sum b_n$ är konvergent, så ger nu Gränstestet att $\sum a_n$ är konvergent.
SVAR: Serien är konvergent.

□

12. Låt $f(x) = 3x^2 + \ln x^3$, $x > 0$.
Visa att f är inverterbar samt bestäm $(f^{-1})'(3)$, dvs inversens derivata i punkten 3.

Svar. Eftersom $f(x) = 3(x^2 + \ln x)$, så har vi derivatan $f'(x) = 3\left(2x + \dfrac{1}{x}\right)$. Eftersom $f'(x) > 0$ för alla $x > 0$ så är f strängt växande. Det följer att varje funktionsvärde endast kan antas en gång, så att f är ett-till-ett och därför inverterbar. Inversens derivata i punkten 3 är

$$\left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{f'(a)}$$

där a uppfyller att $f(a) = 3$. Vi behöver alltså hitta a så att $3(a^2 + \ln a) = 3$, dvs så att $a^2 + \ln a = 1$. Vi ser att $a = 1$ passar bra. Eftersom $f'(1) = 3\,(2+1) = 9$ så har vi nu

$$\left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{9}.$$

SVAR: $\left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{9}$. $\square$

Del B

13. Låt D vara det område i xy-planet som begränsas av kurvan $y = \ln x$, x-axeln och linjerna $x = 1$ och $x = e$. Beräkna volymen av den kropp som genereras då D roterar kring
(a) x-axeln,
(b) y-axeln.

Svar. (a) Skivformeln ger volymen

$$\int_1^e \pi\,(\ln x)^2\,dx$$

som vi löser med partiell integration där vi väljer $f' = \pi$ och $g = (\ln x)^2$. Då är $f = \pi x$ och $g' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$, och volymen blir

$$\begin{aligned} & \left[\pi x \cdot (\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e \pi x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ = \;& \pi e - \int_1^e 2\pi \ln x\,dx = \pi\left(e - \int_1^e 2\ln x\,dx\right) \end{aligned}$$

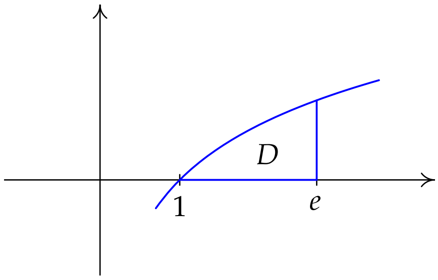
Nu gör vi ytterligare en partiell integration, med $f' = 2$ och $g = \ln x$, och får

$$\begin{aligned} & \pi\left(e - \int_1^e 2\ln x\,dx\right) = \pi\left(e - \left([2x\ln x]_1^e - \int_1^e 2x\frac{1}{x}\,dx\right)\right) \\ = \;& \pi\left(e - [2x\ln x]_1^e + \int_1^e 2\,dx\right) \\ = \;& \pi\left(e - 2e + [2x]_1^e\right) = \pi\,(-e + 2e - 2) = \pi\,(e-2). \end{aligned}$$

(b) Vid rotation kring y-axeln använder vi skalformeln, och partiell integration:

$$\begin{aligned} V &= \int_1^e 2\pi x \ln x\,dx = \pi\left(\left[x^2 \ln x\right]_1^e - \int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx\right) \\ &= \pi\left(e^2 - \int_1^e x\,dx\right) = \pi\left(e^2 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e\right) \\ &= \pi\left(e^2 - \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\right) = \pi\left(\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(e^2 + 1\right). \end{aligned}$$

SVAR: (a) $\pi\,(e-2)$. (b) $\frac{\pi}{2}\left(e^2+1\right)$.



D begränsas av kurvan $y = \ln x$, x-axeln och linjen $x = e$.

$\square$

14. Rita kurvan $y = \dfrac{4+x}{2+|x|}$. Beräkna extremvärden och asymptoter. Ange intervall där kurvan är konvex eller konkav. (4)

Svar. Vi börjar med att studera kurvan för $x \geq 0$. Då är $y = \dfrac{4+x}{2+x} = 1 + \dfrac{2}{2+x}$. Derivatorna är (för $x > 0$)

$$y' = \frac{-2}{(2+x)^2} < 0 \quad \text{och} \quad y'' = \frac{4}{(2+x)^3} > 0,$$

så y är strängt avtagande och konvex till höger om 0.
För $x < 0$ gäller att $y = \dfrac{4+x}{2-x} = -\dfrac{2-x-6}{2-x} = -1 + \dfrac{6}{2-x}$. Derivatorna blir (för $x < 0$)

$$y' = \frac{6}{(2-x)^2} > 0 \quad \text{och} \quad y'' = \frac{12}{(2-x)^3} > 0,$$

så kurvan är strängt växande och konvex till vänster om 0. Eftersom

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{2+x}\right) = 1 \quad \text{och} \quad \lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left(-1 + \frac{6}{2-x}\right) = -1,$$

så är linjen $y = 1$ en horisontell asymptot till höger, och linjen $y = -1$ en asymptot till vänster. Hur ser kurvan ut nära $x = 0$? Vi undersöker om den är deriverbar genom att titta på differenskvoten $\dfrac{y(h)-y(0)}{h}$. Eftersom $y(0) = 2$, så har vi för $h > 0$

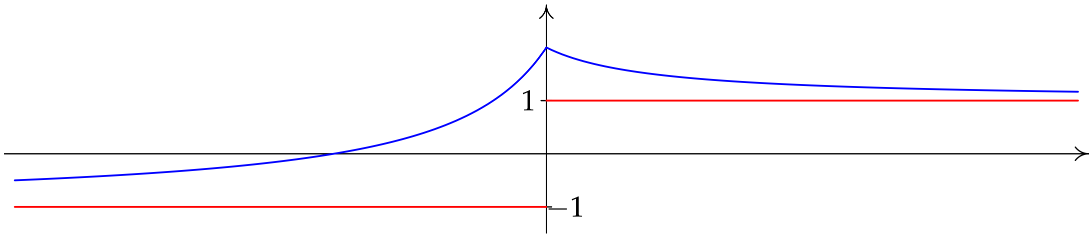
$$\frac{y(h)-y(0)}{h} = \frac{\frac{4+h}{2+h} - 2}{h} = \frac{4+h-2(2+h)}{h(2+h)} = \frac{-h}{h(2+h)} = \frac{-1}{2+h} \longrightarrow -\frac{1}{2} \text{ då } h \to 0^+.$$

För $h < 0$ har vi i stället

$$\frac{y(h)-y(0)}{h} = \frac{\frac{4+h}{2-h} - 2}{h} = \frac{4+h-2(2-h)}{h(2-h)} = \frac{3h}{h(2-h)} = \frac{3}{2-h} \longrightarrow \frac{3}{2} \text{ då } h \to 0^-.$$

Vid $x = 0$ är alltså vänster och högerderivatan inte lika, så funktionen är inte deriverbar där (kurvan har ett hörn där). Eftersom y är strängt växande till vänster och strängt avtagande till höger om $x = 0$, så antar y sitt största värde vid $x = 0$.

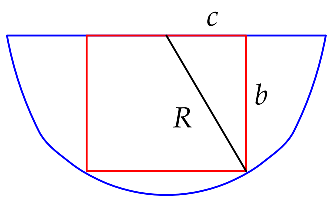
SVAR: Globalt maximum vid $x = 0$, med värdet 2.
Asymptot till höger: $y = 1$.
Asymptot till vänster: $y = -1$.
Konvex i både $(-\infty, 0]$ och $[0, \infty)$.



□

15. Ett skåp har hyllor i form av halvcirklar med radie R på avståndet a från varandra. Bestäm volymen av den största rektangulära box som får plats på en hylla. Hur stor del av den tillgängliga volymen mellan två hyllor fyller denna box? (4)

Svar. Låt lådans bottensidor vara b och $2c$, se figur.



Lådans volym är $V = a \cdot b \cdot 2c$, men $c^2 = R^2 - b^2$, så vi kan skriva volymen som en funktion av b (a och R är konstanter givna i uppgiften):

$$V(b) = 2ab\sqrt{R^2 - b^2}, \qquad 0 < b < R.$$

Derivatan av V fås av produktregeln:

$$V'(b) = 2a\sqrt{R^2 - b^2} + 2ab \cdot \frac{-2b}{2\sqrt{R^2 - b^2}} = 2a \cdot \frac{R^2 - 2b^2}{\sqrt{R^2 - b^2}},$$

så $V'(b) = 0 \Leftrightarrow R^2 = 2b^2 \Leftrightarrow b = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Man ser att $V'(b) > 0$ för $0 < b < \frac{R}{\sqrt{2}}$, och $V'(b) < 0$ för $\frac{R}{\sqrt{2}} < b < R$. Alltså är $b_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}$ en global maxpunkt. Eftersom $b_0^2 = \frac{R^2}{2}$, så är $R^2 - b_0^2 = \frac{R^2}{2}$, och den maximala volymen av boxen blir

$$V = 2ab_0\sqrt{R^2 - b_0^2} = 2ab_0\sqrt{\frac{R^2}{2}} = 2ab_0\frac{R}{\sqrt{2}} = 2a\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 = aR^2.$$

Den tillgängliga volymen mellan två hyllor är $\frac{1}{2}\pi R^2 a$, varför den efterfrågade andelen blir

$$\frac{aR^2}{\frac{1}{2}\pi R^2 a} = \frac{2}{\pi}.$$

SVAR: Maximala volymen av boxen är aR^2, som utgör andelen $\frac{2}{\pi}$ av den tillgängliga volymen på hyllan. □

16. För funktionen f gäller att $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ för $x > 0$, medan $f(x) = ax + b$ för $x \le 0$. Bestäm konstanterna a och b så att f blir kontinuerlig och deriverbar överallt. (4)

Svar. Man ser direkt att f är kontinuerlig och deriverbar för alla $x \neq 0$. För att f ska vara kontinuerlig i $x = 0$ krävs att 1) $f(0)$ är definierad och 2) $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$. Vi har $f(0) = b$. Eftersom $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(ax+b) = b$, så krävs alltså att även $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^x-1}{x} = b$. Med Maclaurinutvecklingen $e^x = 1 + x + \mathcal{O}\left(x^2\right)$ får vi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + x + \mathcal{O}\left(x^2\right) - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(1 + \mathcal{O}(x)\right) = 1,$$

och alltså krävs för kontinuitet att $b = 1$.

Deriverbarheten vid $x = 0$ studeras med differenskvoten $\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$. Deriverbarhet medför kontinuitet, så vi har $b = 1 = f(0)$. Vänstergränsvärdet av differenskvoten blir

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{ah + b - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{ah + 1 - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} a = a.$$

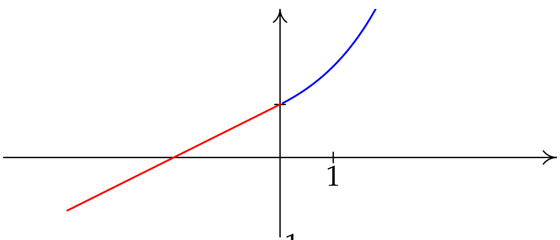
Gränsvärdet från höger blir

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - 1}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{e^h - 1}{h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^h - 1 - h}{h^2} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1 + h + \frac{h^2}{2} + \mathcal{O}\left(h^3\right) - 1 - h}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2} + \mathcal{O}(h) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

För att f ska vara deriverbar i $x = 0$ krävs alltså att $a = \frac{1}{2}$ och $b = 1$.

SVAR: För kontinuitet krävs $b = 1$.

För deriverbarhet krävs $a = \frac{1}{2}$ och $b = 1$.



$a = \frac{1}{2}$ och $b = 1$.

□