Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson, Cecilia Karlsson

TENTAMEN
ENVARIABELANALYS
2010-12-10

Tentamen består av 10 uppgifter (max 3 poäng per uppgift), 2 problem (max 5 poäng per problem) samt 3 extra problem (max 4 poäng per extra problem). Till både uppgifterna, problemen och extra problemen fordras fullständiga lösningar. 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 52 betyget 5.
Skrivtid: 08.00-13.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

UPPGIFTER

1. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-e^{-x^2}}{x(e^x-e^{-x})}$.

2. Bestäm **största värdet** av $e^{-x}(1-e^{-x})$ på intervallet $0 \le x < \infty$. Motivera noggrant.

3. Beräkna integralen $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

4. Bestäm **största värdet** av $f(x) = (x-1)^2 e^{-\frac{x}{3}}$ på intervallet $0 \le x < \infty$. Motivera noggrant och var uppmärksam på funktionen på **hela** intervallet.

5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^\pi x \sin x\, dx$.

6. Skissera kurvan
$$y = \frac{(x+1)^2}{x-1} = x+3+\frac{4}{x-1}.$$
Bestäm särskilt nollställena samt eventuella vertikala, horisontella och sneda asymptoter samt lokala extrempunkter.

7. Bestäm den lösning till differentialekvationen
$$y'' + y = 1$$
för vilken $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

8. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' - 2xy = 2x$ för vilken $y(0) = 0$.

9. Talet x uppfyller att $|x| < 1$. Bestäm summan av serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.

10. Potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\frac{1}{2}} \cdot 2^n}$ har konvergensradien lika med 2. Utnyttja bland annat denna information för att bestämma för vilka x serien divergerar, konvergerar absolut respektive konvergerar villkorligt.

V.G.V!

PROBLEM

1. Parablerna
$$y = (x+1)^2 \text{ och } y = -(x-1)^2$$
har två gemensamma tangenter. Bestäm tangeringspunkterna på respektive parabel.

2.
$$f(x) = x^2 \ln|x|,\ x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

   a) Bevisa att $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, dvs att funktionen är kontinuerlig i origo.
   b) Bevisa att $f'(0) = 0$.
   c) Bestäm lokala extrempunkterna och skissera kurvan $f(x) = x^2 \ln|x|, x \neq 0, f(0) = 0$.

EXTRA PROBLEM

1. Ge bevis eller motexempel till följande påståenden om funktionen $f(x)$:

   a) Om $|f(x)|$ är kontinuerlig på intervallet (a,b) så är även $f(x)$ kontinuerlig där.
   b) Om $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet (a,b) så är även $|f(x)|$ kontinuerlig där.

2. Låt $a_n \geq 0$ för alla $n = 1, 2, 3...$ och antag att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar. Visa att även $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergerar.

   Ledning: Använd att $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

   Gäller ovanstående även om vi släpper på kravet att $a_n \geq 0$ för alla n? Ge bevis eller motexempel.

3. $I = [a,b]$ är ett slutet intervall och K en konstant sådan att $0 < K < 1$. Betrakta en funktion $f(x) : I \to I$ sådan att $|f(u) - f(v)| \leq K|u - v|$ för alla u och v i intervallet I. Bevisa att $f(x)$ har en **unik** fix-punkt $r \in I$ (dvs $f(r) = r$ och $f(s) \neq s$ för alla $s \in I$, $s \neq r$).

   Ledning: Visa att f är kontinuerlig på I. Studera sedan funktionen $g(x) = f(x) - x$ och använd lämplig sats från kursen för att visa existensen av en fixpunkt. Motivera varför fixpunkten är unik.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \frac{1}{1-r}, \ |r| < 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \qquad \lim_{x \to 0+} x^a \ln x = 0, \quad a > 0.$$