

Skrivtid: 8–13. Tillåtna hjälpmedel: Bara pennor, radergummi, linjal och papper (det sistnämnda tillhandahålles). *Betygsgränser:* Minst 16 poäng på del 1 och minst 20 poäng sammanlagt ger (minst) betyg 3; minst 16 poäng på del 1 och minst 30 poäng sammanlagt ger (minst) betyg 4; minst 18 poäng på del 1 och minst 37 poäng sammanlagt ger betyg 5. *Bonuspoäng:* Om man har fått minst 16 poäng på duggan som gick i mars så behöver man inte göra uppgifterna 1–5 och får automatiskt full poäng på dessa. Övriga bonuspoängkriterier beskrivs på kurstillfällets hemsida, som kan nås från Studentportalen. ***Alla svar skall motiveras med beräkningar eller med ord, beroende på uppgiftens karaktär. Otydligt skrivna svar eller motiveringar ger inte full poäng.***

Del 1

Varje uppgift, från 1 till 10, ger maximalt 2 poäng; alltså maximalt 20 poäng på denna del.

1. Låt $a_n = \frac{1}{n^2}$ för $n = 1, 2, 3, \dots$. Bestäm om följande gränsvärde existerar, och vad det är i så fall:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

2. Beräkna derivatan av

$$f(x) = (\sin x)(\ln x^2) \quad \text{och} \quad g(x) = \arctan(x^2).$$

3. Vilket villkor måste vara uppfyllt för att en funktion skall vara inverterbar på ett intervall $[a, b]$?

4. Om en funktion $g(x)$ får vi veta följande:

- g är deriverbar i alla (reella) punkter x ,
- g är positiv på $(-\infty, 0)$ och negativ på $(0, \infty)$,
- $g(-1) = 2$, $g(1) = -2$,
- g' är positiv på $(-\infty, -1)$ och på $(1, \infty)$, och
- g' är negativ på $(-1, 1)$.

Beskriv mängden av alla värden $g(x)$ som g kan anta.

5. (a) Bestäm gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}$ (som reellt tal eller $\pm\infty$).

(b) Använd svaret från a-delen och faktumet att e^x och $\ln x$ är varandras inverser för att avgöra om följande gränsvärde existerar och vad det är i så fall: $\lim_{n \rightarrow \infty} (n)^{1/n}$.

6. Beräkna följande integraler:

$$\int x \ln(x^2) dx \quad \int \frac{1}{t^2 + 4} dt$$

7. Beräkna $\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx$ och använd resultatet för att avgöra om området i xy -planet som begränsas av linjerna $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ och kurvan $y = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ har ändlig area (dvs. begränsad av något reellt tal) eller inte.

8. Finn den allmänna lösningen till följande differentialekvation:

$$\frac{dy}{dx} = y(x^2 + 1)$$

Fortsätter på nästa sida

9. Finn den lösning till differentialekvationen

$$p''(t) + 4p'(t) + 4p(t) = 0$$

som uppfyller villkoren att $p(0) = 0$ och $p'(0) = 3$.

10. Bestäm för var och en av serierna om den är konvergent eller inte:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 5}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^{1,5}}$$

Del 2

Varje uppgift, från 11 till 15, ger maximalt 5 poäng; alltså maximalt 25 poäng på denna del.

11. Låt $f(x) = e^{-x^2}$ och låt F vara den antiderivata till f för vilken $F(0) = 0$. Man har visat att F inte kan uttryckas med hjälp av ändligt många tillämpningar av de fyra räknesätten, funktionssammansättning och elementära funktioner. Men det är möjligt att beskriva F med hjälp av en potensserie.

(a) Beräkna konvergensradien för Taylorserien för e^x kring 0:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

(b) Finn Taylorserien för F kring 0, och beräkna dess konvergensradie.

(c) Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}.$$

12. En vattencistern i Sahara rymmer 300 000 liter. Varje dygn försvinner 300 liter av vattnet genom läckage. Med hjälp av tankbilar från kusten hålls cisternen hela tiden helt fylld med vatten. En dag håller en tjänsteperson från SIDA 1 liter klor i cisternen för att hålla bakteriehalten nere på en godtagbar nivå. Efter hur lång tid har vattnets klorhalt sjunkit till 10^{-4} procent, vilket i detta fall anses vara det hygieniska gränsvärdet?

Ledning: Låt $C(t)$ vara mängden klor i cisternen och $h(t)$ klorhalten (dvs. $h(t) = C(t) / 3 \cdot 10^5$) vid tiden t . $C'(t)$ är proportionell mot $h(t)$ och uppgiftsformuleringen antyder vad proportionalitetskonstanten borde vara.

13. Beräkna volymen av den rotations kropp som genereras då det minsta området som innesluts av linjen $y = 3 - x$ och kurvan $x^2 + y^2 = 9$ roterar kring y -axeln.

14. Vad är det minsta avståndet mellan en punkt på kurvan $x^3 = \frac{1}{1+y^2}$ och punkten $(0, 0)$? (Ledning: Vad är avståndet mellan $(0, 0)$ och (x, y) ?)

15. Lös differentialekvationen

$$y'(x) + \frac{4y(x)}{x^2 - 4} = 1.$$

För att förenkla beräkningarna så räcker det med att (den allmänna) lösningen beskrivs för $x > 2$. För full poäng så skall eventuella antiderivator till sist anges utan hjälp av integraltecken (dvs. integralerna skall "räknas ut").

Lycka till!