

Definition 2.8 (Tarskis sanningsdefinition)

Låt V vara en vokabulär och M en V -struktur. För varje V -formel A och M -tolkning w så definierar vi

$M \models_w A$ samt dess negation $M \not\models_w A$

som vi med ord uttrycker "A är sann i M under tolkningen w " respektive "A är falsk i M under tolkningen w ", genom induktion över formlernas uppbyggnad:

(1) Om A är $t_1 = t_2$ där $t_1, t_2 \in T_V$ så $M \models_w A$ om och endast om $t_1^w = t_2^w$.

(2) Om $A = P(t_1, \dots, t_n)$ där $P \in V$ och $t_1, \dots, t_n \in T_V$ så $M \models_w A$ om och endast om $(t_1^w, \dots, t_n^w) \in P^M$.

(3) Om $A = \neg B$ så $M \models_w A$ om och endast om $M \not\models_w B$.

(4) Om $A = B \wedge C$ så $M \models_w A$ om och endast om $M \models_w B$ och $M \models_w C$.

(5) Om $A = B \vee C$ så $M \models_w A$ om och endast om $M \models_w B$ eller $M \models_w C$.

(6) Om $A = B \rightarrow C$ så $M \models_w A$ om och endast om $M \not\models_w B$ eller $M \models_w C$.

(7) Om $A = B \leftrightarrow C$ så $M \models_w A$ om och endast om antingen

$$M \models_w B \text{ och } M \models_w C$$

eller $M \not\models_w B$ och $M \not\models_w C$.

(8) Om $A = \forall x_i B$ så $M \models_w A$ om och endast om $M \models_{w[a/x_i]} B$ för alla $a \in \text{dom}(M)$.

(9) Om $A = \exists x_i B$ så $M \models_w A$ om och endast om $M \models_{w[a/x_i]} B$ för något $a \in \text{dom}(M)$.

Lemma 2.9 Låt V vara en vokabulär,
 $\mathcal{M}$ en V -struktur och t en V -term.
 Om w och w' är $\mathcal{M}$ -tolkningar sådana
 att $w(x_i) = w'(x_i)$ om $x_i \in Fv(t)$, så $t^w = t^{w'}$.

Bevis. Vi använder induktion över termernas
 uppbyggnad.

(i) Om $t = x_i$ så $x_i \in Fv(t)$ och
 $t^w = w(x_i) = w'(x_i) = t^{w'}$.

(ii) Om $t = c_i$ (där c_i är en konstantsymbol)
 så $t^w = c_i^{\mathcal{M}} = t^{w'}$.

(iii) Antag att $t = f_i(t_1, \dots, t_n)$ och att $t_j^w = t_j^{w'}$ för $1 \leq j \leq n$. Eftersom f_i
 är en funktion så
 $t^w = f_i^{\mathcal{M}}(t_1^w, \dots, t_n^w) = f_i^{\mathcal{M}}(t_1^{w'}, \dots, t_n^{w'}) = t^{w'}$. $\square$

Lemma 2.10 Låt V vara en vokabulär,
 $\mathcal{M}$ en V -struktur och A en V -formel.

Om w och w' är $\mathcal{M}$ -tolkningar sådana
att $w(x_i) = w'(x_i)$ om $x_i \in F_V(A)$, så

$$\mathcal{M} \models_w A \iff \mathcal{M} \models_{w'} A.$$

Bevis. Vi använder induktion över formlernas uppbyggnad. Låt w och w' vara $\mathcal{M}$ -tolkningar och antag att $w(x_i) = w'(x_i)$ om $x_i \in F_V(A)$.

1. Antag att A är $t_1 = t_2$. Eftersom
 $F_V(A) = F_V(t_1) \cup F_V(t_2)$ så gäller att
 $w(x_i) = w'(x_i)$ om $x_i \in F_V(t_1)$ eller $x_i \in F_V(t_2)$.

Från Lemma 2.9 följer att $t_1^w = t_1^{w'}$

och $t_2^w = t_2^{w'}$ vilket medför att

$$t_1^w = t_2^w \iff t_1^{w'} = t_2^{w'}.$$

Alltså har vi $\mathcal{M} \models_w A \iff \mathcal{M} \models_{w'} A$.

2. Antag att $A = P_i(t_1, \dots, t_n)$. Vi har
 $F_v(A) = F_v(t_1) \cup \dots \cup F_v(t_n)$. Detta ger att
 om $k \in \{1, \dots, n\}$ och $x_i \in F_v(t_k)$ så $w(x_i) = w'(x_i)$
 Enligt Lemma 2.9 så $t_k^w = t_k^{w'}$ för
 alla $k \in \{1, \dots, n\}$. Detta ger att
 $(t_1^w, \dots, t_n^w) \in P_i^M \iff (t_1^{w'}, \dots, t_n^{w'}) \in P_i^M$,
 dvs. $M \models_w A \iff M \models_{w'} A$.

3. Antag att $A = \neg B$ och antag att
 om $w_1(x_i) = w_2(x_i)$ för $x_i \in F_v(B)$
 så $M \models_{w_1} B \iff M \models_{w_2} B$.

Eftersom vi har antagit att $w(x_i) = w'(x_i)$
 för $x_i \in F_v(A)$ och $F_v(A) = F_v(B)$ så
 följer att $M \models_w B \iff M \models_{w'} B$ vilket
 ger $M \models_w A \iff M \not\models_w B \iff M \not\models_{w'} B$
 $\iff M \models_{w'} A$.

4. Antag att $A = B \wedge C$ och antag att:

(i) om $w_1(x_i) = w_2(x_i)$ för $x_i \in F_V(B)$

$$\text{så } \mathcal{M} \models_{w_1} B \Leftrightarrow \mathcal{M} \models_{w_2} B$$

och

(ii) om $w_1(x_i) = w_2(x_i)$ för $x_i \in F_V(C)$

$$\text{så } \mathcal{M} \models_{w_1} C \Leftrightarrow \mathcal{M} \models_{w_2} C.$$

○ Eftersom vi har antagit att $w(x_i) = w'(x_i)$ för $x_i \in F_V(A)$ och $F_V(A) = F_V(B) \cup F_V(C)$ så följer att

$$\mathcal{M} \models_w A \Leftrightarrow \mathcal{M} \models_w B \text{ och } \mathcal{M} \models_w C$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{M} \models_{w'} B \text{ och } \mathcal{M} \models_{w'} C$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{M} \models_{w'} A.$$

○ På liknande sätt behandlas fallen 5, 6 och 7 som motsvarar konnektiven $\vee$, $\rightarrow$ och $\leftrightarrow$.

8 Antag att $A = \forall x_i B$ och antag att

om $w_1(x_i) = w_2(x_i)$ för alla $x_i \in F_V(B)$

$$\text{så } \mathcal{M} \models_{w_1} B \Leftrightarrow \mathcal{M} \models_{w_2} B.$$

Låt $a \in \text{dom}(\mathcal{M})$. Eftersom vi har antagit att $w(x_i) = w'(x_i)$, för alla $x_i \in F_v(A)$, och $F_v(A) = F_v(B) - \{x_j\}$ så följer att $w[a/x_j](x_i) = w'[a/x_j](x_i)$ om $x_i \in F_v(B)$.

Detta ger $\mathcal{M} \models_{w[a/x_j]} B \iff \mathcal{M} \models_{w'[a/x_j]} B$

och eftersom detta argument fungerar för alla $a \in \text{dom}(\mathcal{M})$ så $\mathcal{M} \models_w A \iff \mathcal{M} \models_{w'} A$.

9. Fallet $A = \exists x_j B$ behandlas på liknande sätt som 8 och överläts åt läraren. $\square$

Definition 2.11 Låt V vara en vokabulär, $\mathcal{M}$ en V -struktur och A en sluten V -formel. Vi säger att A är sann i $\mathcal{M}$, vilket vi betecknar med $\mathcal{M} \models A$, om för varje $\mathcal{M}$ -tolkning w , $\mathcal{M} \models_w A$.

Om $\mathcal{M} \models A$ så säger vi att $\mathcal{M}$ är en modell till A .

Anmärkning Observera att om A är sluten
så $Fv(A) = \emptyset$ och $M \models_w A \Leftrightarrow M \models_{w'} A$
för alla tolkningar w och w' vilket betyder
att $M \models A \Leftrightarrow M \models_w A$ för alla w
 $\Leftrightarrow M \models_w$ för något w .

Definition 2.12 Låt V vara en vokabulär.
Om A är en sluten V -formel så säger vi
att A är sann (eller valid), vilket betecknas
 $\models A$, om $M \models A$ för alla V -strukturer
 M . Om A är en sluten V -formel och
 T är en mängd av slutna V -formler
så säger vi att A är en konsekvens
av T , vilket betecknas $T \models A$, om
 $M \models A$ för varje V -struktur M sådan
att $M \models B$ för alla $B \in T$.

Vi säger att två V -formler A och B
är ekvivalenta om $M \models_w A \Leftrightarrow B$
för alla V -strukturer M och ^(alla) M -tolkningar w .