Formler

Formler i predikatlogiken är ändliga följder av symboler. Följande symboler används:

Konnektiv: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Kvantorer: $\forall$, $\exists$ (universal- samt existens-kvantorn)

Variabler: x_0 , x_1 , x_2 , x_3 , ...

Hjälpsymboler: (,) och , ← kommatecken

Dessutom används symboler som kan variera från situation till situation:

Predikatsymboler (också kallade relations-symboler): $=$, P_i , $i \in I$, för någon mängd I.

Funktionssymboler: f_i , $i \in J$, för någon mängd J.

Konstantsymboler: c_i , $i \in K$, för någon mängd K.

Med varje predikatsymbol och varje funktions-symbol associerar vi ett heltal större än 0, som vi kallar symbolens ställighet.
Symbolen '$=$' är alltid 2-ställig.

En mängd

$$V = \{P_i : i \in I\} \cup \{f_i : i \in J\} \cup \{c_i : i \in K\}$$

där I, J, K är ("indexmängder") och varje predikatsymbol och funktionssymbol har en bestämd ställighet kallas för en <u>vokabulär</u>. Det är tillåtet med vokabulärer som saknar predikatsymboler och/eller funktionssymboler och/eller konstantsymboler. Om $V = \emptyset$ så kommer alla atomära V-formler att se ut som $x_i = x_j$, där $i, j \in \mathbb{N}$.

<u>Definition 2.1</u> Låt V vara en vokabulär.

(i) Alla variabler och konstanter i V är <u>V-termer</u>

(ii) Om $f_i \in V$ är en n-ställig funktionssymbol och $t_1, \ldots, t_n$ är V-termer så är $f_i(t_1, \ldots, t_n)$ en <u>V-term</u>.

(iii) Endast de följder av symboler som kan bildas genom tillämpningar av (i) och (ii) är <u>V-termer</u>.

(iv) Mängden av V-termer betecknas T_V.

<u>Definition 2.2</u> Låt V vara en vokabulär.

(i) Om $t_1, t_2 \in T_V$ så är $t_1 = t_2$ en <u>atomär V-formel</u>

(ii) Om $t_1, \ldots, t_n \in T_V$ och $P_i \in V$ är en n-ställig predikatsymbol så är $P_i(t_1, \ldots, t_n)$ en <u>atomär V-formel</u>

(iii) Alla atomära V-formler är <u>V-formler</u> (och atomära formler är endast de som kan bildas så som i (i) och (ii))

(iv) Om A och B är V-formler och $i \in \mathbb{N}$ så är $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$, $\forall x_i A$ och $\exists x_i A$ <u>V-formler</u>.

(v) Endast de följder som kan bildas med hjälp av tillämpningar av (i)–(iv) är <u>V-formler</u>.

(vi) F_V betecknar mängden av V-formler.

__Anmärkning__ När vokabulären V är underförstådd eller inte har betydelse säger vi bara __formel__ i stället för V-formel. Som tidigare kommer vi ofta att utelämna paranteser och tex. skriva $A \wedge B$ i stället för $(A \wedge B)$, för enkelhetens skull.

__Definition 2.3__ Om t är en term så definieras __mängden av fria variabler i t__, betecknad $Fv(t)$, på följande sätt:

(i) $Fv(x_i) = \{x_i\}$ för varje variabel x_i.

(ii) $Fv(c) = \emptyset$ (där $\emptyset$ betecknar den tomma mängden) för varje konstant-symbol c.

(iii) Om f är en n-ställig funktionssymbol och $t_1, \ldots, t_n$ är termer så

$$Fv(f(t_1, \ldots, t_n)) = Fv(t_1) \cup \ldots \cup Fv(t_n).$$

__Definition 2.4__ Om A är en formel så definieras __mängden av fria variabler i A__, betecknad $Fv(A)$, på följande sätt:

(i) Om A är $t_1 = t_2$ där t_1 och t_2 är termer så $Fv(A) = Fv(t_1) \cup Fv(t_2)$.

(ii) Om $A = P(t_1, \dots, t_n)$ där P är en predikatsymbol och $t_1, \dots, t_n$ är termer så $Fv(A) = Fv(t_1) \cup \dots \cup Fv(t_n)$.

(iii) Om $A = \neg B$ så $Fv(A) = Fv(B)$

(iv) Om $A = (B \square C)$ där $\square$ är ett av konnektiven $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ eller $\leftrightarrow$ så $Fv(A) = Fv(B) \cup Fv(C)$.

(v) Om $A = \forall x_i B$ så $Fv(A) = Fv(B) - \{x_i\}$

(vi) Om $A = \exists x_i B$ så $Fv(A) = Fv(B) - \{x_i\}$

__Anmärkning__ Om t är en term så är $Fv(t)$ mängden av alla variabler som förekommer i t. Om A är en formel så är __inte nödvändigtvis__ $Fv(A)$ mängden av alla variabler som förekommer i A. Om exempelvis $A = \forall x_0\, P(x_0, x_1)$, där P är en predikatsymbol, så förekommer ju både x_0 och x_1 i A men $Fv(A) = \{x_1\}$.

Definition 2.5 En formel A sådan att $Fv(A) = \emptyset$, dvs. A har inga fria variabler, kallas för <u>sluten</u>. En sluten formel kallas också för en <u>sats</u>.

Semantik

Innan vi definierar ett sanningsbegrepp för predikatlogiska formler så måste vi introducera begreppet struktur, eller modell som det också kallas.

Definition 2.5 Låt V vara vokabulären

$$V = \{P_i : i \in I\} \cup \{f_i : i \in J\} \cup \{c_i : i \in K\}.$$

En <u>V-struktur</u> $\mathcal{M}$ är en tupel

$$\mathcal{M} = (M, \{P_i^{\mathcal{M}} : i \in I\}, \{f_i^{\mathcal{M}} : i \in J\}, \{c_i^{\mathcal{M}} : i \in K\})$$

sådan att:

- M är en icke-tom mängd,
- För varje $i \in I$, om P_i är en k-ställig predikatsymbol så $P_i^{\mathcal{M}} \subseteq M^k$, dvs. $P_i^{\mathcal{M}}$ är en k-ställig relation på M.
- För varje $i \in J$, om f_i är en k-ställig funktionssymbol så är $f_i^{\mathcal{M}}$ en k-ställig funktion med domän M^k som tar sina värden i M, dvs. $f_i^{\mathcal{M}} : M^k \to M$.
- För varje $i \in K$ så är $c_i^{\mathcal{M}}$ ett element i M, dvs. $c_i^{\mathcal{M}} \in M$.

Om $\mathcal{M} = (M, \{P_i^{\mathcal{M}} : i \in I\}, \{f_i^{\mathcal{M}} : i \in J\}, \{c_i^{\mathcal{M}} : i \in K\})$ så kallar vi M för strukturen $\mathcal{M}$:s <u>universum</u>, eller <u>domän</u>, och vi betecknar M med <u>$\mathrm{dom}(\mathcal{M})$</u>, dvs. $\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = M$.

<u>Exempel</u> Låt P vara en 1-ställig predikatsymbol, låt R vara en 2-ställig predikatsymbol, låt f vara en 1 ställig funktionssymbol

och låt c_0 och c_1 vara konstantsymboler.

Låt $V = \{P, R, f, c_0, c_1\}$.

Vi definierar en V-struktur på följande sätt:

$$\text{Låt } M = \{a, b, c, d, e\},$$

$$c_0^{\mathcal{M}} = a$$

$$c_1^{\mathcal{M}} = b$$

$$P^{\mathcal{M}} = \{b, c\}$$

$$R^{\mathcal{M}} = \{(a,b), (b,c), (c,d), (d,e), (e,a)\}$$

$$f^{\mathcal{M}}(a) = f^{\mathcal{M}}(b) = c, \ f^{\mathcal{M}}(c) = c, \ f^{\mathcal{M}}(d) = e, f^{\mathcal{M}}(e) = d.$$

Då är $\mathcal{M} = (M, \{P^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}\}, \{f^{\mathcal{M}}\}, \{c_0^{\mathcal{M}}, c_1^{\mathcal{M}}\})$ en V-struktur och $dom(\mathcal{M}) = M = \{a, b, c, d, e\}$.

__Exempel__ Låt P vara en 2-ställig relationssymbol, låt f_0 och f_1 vara 2-ställiga funktionssymboler och låt c_0 vara en konstantsymbol. Låt $V = \{P, f_0, f_1, c_0\}$. Vi definierar en V-struktur på följande sätt:

Låt $M = \mathbb{R}$ (= mängden av de reella talen),
För alla $a, b \in \mathbb{R}$, definiera:

$(a,b) \in P^{\mathcal{M}} \iff a < b$ (där $<$ är den vanliga ordningen på $\mathbb{R}$)

$f_0^{\mathcal{M}}(a,b) = a + b$ (där $+$ betecknar addition)

$f_1^{\mathcal{M}}(a,b) = a \cdot b$ (där $\cdot$ betecknar multiplikation)

$c_0^{\mathcal{M}} = 0$ (där 0 är det reella talet "noll")

Då är $\mathcal{M} = (M, \{P^{\mathcal{M}}\}, \{f_0^{\mathcal{M}}, f_1^{\mathcal{M}}\}, \{c_0^{\mathcal{M}}\})$
en V-struktur med domän $\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \mathbb{R}$.

__Anmärkning__ Om vokabulären ej spelar någon roll i sammanhanget så kommer vi bara säga __struktur__ eller __modell__.

__Definition 2.6__ Låt $\mathcal{M}$ vara en struktur.

(i) En __$\mathcal{M}$-tolkning__ är en funktion

$w : \{x_i : i \in \mathbb{N}\} \to \mathrm{dom}(\mathcal{M})$.

(ii) Om w är en $\mathcal{M}$-tolkning och $i \in \mathbb{N}$ och $a \in dom(\mathcal{M})$ så betecknar $w[a/x_i]$ den tolkning som är definierad enligt:

För varje $j \in \mathbb{N}$, $w[a/x_i](x_j) = \begin{cases} a & \text{om } j = i \\ w(x_j) & \text{om } j \neq i \end{cases}$

<u>Definition 2.7</u> Låt V vara en vokabulär, $\mathcal{M}$ en V-struktur och w en $\mathcal{M}$-tolkning. För V-termer t så definierar vi $t^w \in dom(\mathcal{M})$ genom induktion över termernas uppbyggnad:

(i) Om $t = x_i$ för något $i \in \mathbb{N}$ så $t^w = w(x_i)$

(ii) Om $t = c$ för någon konstantsymbol $c \in V$ så $t^w = c^{\mathcal{M}}$.

(iii) Om $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ för någon funktionssymbol $f \in V$ och V-termer $t_1, \ldots, t_n$ så $t^w = f^{\mathcal{M}}(t_1^w, \ldots, t_n^w)$.