

①

Fullständighetssatsen

Vi repeterar följande definitioner:

Låt T och Δ vara mängder av sätter (dvs. slutsatser).

1. $T \vdash \Delta$ betyder att för varje $A \in \Delta$ så finns ett formellt bevis av A som endast använder premisser/antaganden från T . Vi skriver $T \vdash A$ i stället för $T \vdash \{A\}$.

2. $T \models \Delta$ betyder att om $\mathcal{M}$ är en modell/struktur sådan att varje $A \in T$ är sann i $\mathcal{M}$ så måste även varje $B \in \Delta$ vara sann i $\mathcal{M}$.

Vi skriver $T \models B$ i stället för $T \models \{B\}$.

För att slippa fästa oss vid något specifikt formellt bevisssystem så antar vi följande:

Antagande 1: Vi arbetar med ett formellt bevisssystem som är sunt (dvs. $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \vDash A$) och som har följande egenskaper:

- (a) $A \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash A$.
- (b) $\Gamma \vdash A$ och $\Delta \vdash B \Rightarrow \Gamma \cup \Delta \vdash A \wedge B$.
- (c) $\Gamma \vdash A \wedge B \Rightarrow \Gamma \vdash A$ och $\Gamma \vdash B$.
- (d) $\Gamma \cup \{A\} \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \rightarrow B$
- (e) $\Gamma \vdash A$ och $\Delta \vdash A \rightarrow B \Rightarrow \Gamma \cup \Delta \vdash B$
- (f) $\Gamma \vdash B \wedge \neg B \Rightarrow \Gamma \vdash A$ (för vilket A som helst).
- (g) $\Gamma \cup \{A\} \vdash B \wedge \neg B \Rightarrow \Gamma \vdash \neg A$
- (h) $\Gamma \vdash \neg \neg A \Rightarrow \Gamma \vdash A$
- (i) Om $x \notin F_v(B)$ så
 $\vdash \forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (\exists x A \rightarrow B)$
- (j) Om $x \notin F_v(A)$ så
 $\vdash (A \rightarrow \exists x B) \rightarrow \exists x (A \rightarrow B)$.

(k) Om y inte förekommer i A så

$$\vdash \exists x A \rightarrow \exists y A[y/x].$$

(l) Om x inte förekommer i A , c inte förekommer i någon formel i T och $T \vdash A$, så $T \vdash \forall x A[x/c]$.

(m) Om t är en term utan fria variabler och $T \vdash A[t/x]$ så $T \vdash \exists x A$.

$$(n) \quad \vdash \forall x A \leftrightarrow \neg \exists x \neg A.$$

För alla variabler x, y, z

$$(o) \quad \vdash \forall x (x = x)$$

$$(p) \quad \vdash \forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$

$$(q) \quad \vdash \forall x \forall y \forall z ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z).$$

För alla variabler x, y , termer t och formler A

$$(r) \quad \vdash \forall x \forall y (x = y \rightarrow t[y/x] = t)$$

$$(s) \quad \vdash \forall x \forall y (x = y \rightarrow (A[y/x] \leftrightarrow A)).$$

Vi kommer också att anta att vokabulären (mängden av relations-, funktions- och konstantsymboler) är uppräknelig. Detta antagande är inte nödvändigt men förenklar beviset. Se kommentarer i slutet av detta häfte.

Fullständighetssatsen

Om $T \models \Delta$ så $T \vdash \Delta$.

Vi behöver några nya begrepp innan vi startar med beviset.

Definition

Låt V vara en vokabulär (dvs. en mängd av relation-, funktion- och konstantsymboler). Låt F_V beteckna mängden av alla formler som kan byggas upp från V .

- (i) En mängd $T \subseteq F_V$ som bara innehåller sätter (dvs. slutna formler) kallas för en V -teori; ofta säger vi bara teori (då V är underförstådd).
- (ii) En mängd $T \subseteq F_V$ kallas för inkonsistent om det finns $A \in F_V$ sådan att $T \vdash A \wedge \neg A$. Annars säger vi att T är konsistent.

(5)

(iii) Låt $T \subseteq F_V$ vara en teori.

Vi säger att T är maximalkonsistent om T är konsistent och $T \cup \{A\}$ är inkonsistent för varje sats $A \in F_V - T$.

Exempel Om $\mathcal{M}$ är en V -struktur (dvs. en struktur i vilken varje symbol i V har en tolkning). och

$$T = \{A : A \text{ är en sats i } F_V \text{ och } \mathcal{M} \models A\},$$

så är T maximalkonsistent.

För om $B \in F_V - T$ är en sats så $\mathcal{M} \not\models B$ och $\mathcal{M} \models \neg B$, vilket ger $\neg B \in T$. Från Antagande 1 för vi $T \cup \{B\} \vdash B \wedge \neg B$ så $T \cup \{B\}$ är inkonsistent.

⑥

1. Följande två lemmor antar vi att en vokabulär V är fixerad, och att F_V som vanligt betecknar mängden av formler som kan byggas upp från V .

Lemma 2 Låt $\Gamma \subseteq F_V$ och $A \in F_V$.

(i) Om $\Gamma \cup \{\neg A\}$ är inkonsistent så $\Gamma \vdash A$.

(ii) Om $\Gamma \cup \{A\}$ är inkonsistent så $\Gamma \vdash \neg A$.

Beris. Vi använder bevissystemets egenskaper som räknas upp i Antagande 1.

(i) Antag att $\Gamma \cup \{\neg A\}$ är inkonsistent, dvs. $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B \wedge \neg B$ för något B . Egenskaperna (g) och (h) ger då $\Gamma \vdash A$.

(ii) På samma sätt som (i) om man byter plats på ' A ' och ' $\neg A$ '. $\square$

Lemma 3. Antag att $T \subseteq F_V$ är en maximalkonsistent teori och att $A, B \in F_V$ är slutna formler.

- (a) $T + A \Rightarrow A \in T$.
- (b) $T + A$ eller $T + \neg A$.
- (c) $A \in T \Leftrightarrow \neg A \notin T$.
- (d) $\neg A \in T \Leftrightarrow A \notin T$.
- (e) $A \wedge B \in T \Leftrightarrow A \in T$ och $B \in T$.
- (f) $A \vee B \in T \Leftrightarrow A \in T$ eller $B \in T$.
- (g) $A \rightarrow B \in T \Leftrightarrow A \notin T$ eller $B \in T$.
- (h) $A \leftrightarrow B \in T \Leftrightarrow \{A, B\} \subseteq T$ eller $\{\neg A, \neg B\} \subseteq T$.

Beris. Man använder, som i föregående bevis, egenskaperna i Antagande 1. Vi visar här (a) och (b) och lämnar (c) - (h) som övning.

- (a) Antag att $T + A$. Om $A \notin T$ så följer, från antagandet att T är maximalkonsistent, att $T \cup \{A\}$

är inkonsistent, och föregående lemma medför att $T' \vdash \neg A$ vilket (genom egenskap (b) i Antagande 1) ger $T' \vdash A \wedge \neg A$. Detta motsäger antagandet att T' är konsistent, så vi drar slutsatsen att om $T' \vdash A$ så $A \in T'$.

(b) Om $T' \nvdash A$ så följer från föregående lemma att $T' \cup \{\neg A\}$ är konsistent, och eftersom T' är maximalkonsistent ger detta att $\neg A \in T'$ och slutligen $\neg A \in T'$ (via egenskap (a) i Antagande 1).

(c) - (h) är övning. $\square$

Definition En struktur/modell $\mathcal{M}$ kallas för en modell till/av T' , där T' är en teori, om $\mathcal{M} \models T'$; dvs. om $\mathcal{M} \models A$ för alla $A \in T'$.