

Med ovanstående kunskaper så är fullständighetsatsen en direkt konsekvens av följande resultat:

Satsen om modellexistens

Låt T vara en teori.

T har en modell om och endast om T är konsistent.

Bevis av fullständighetsatsen med hjälp av satsen om modellexistens.

Vi skall visa att om $T \models \Delta$ så $T \vdash \Delta$. Notera först att det räcker att göra detta i fallet då $\Delta = \{A\}$. Så antag att $T \models A$.

Vi antar nu att $T \not\vdash A$ och kommer att härleda en motsägelse.

Enligt Lemma 2 så är $T \cup \{\neg A\}$ konsistent och satsen om modell-existens säger att $T \cup \{\neg A\}$ en modell

M , dvs. $M \models B$ för alla $B \in T$
och $M \models \neg A$, så $M \not\models A$.

Men detta motsäger antagandet
att $T \models A$. Alltså måste vi ha $T \vdash A$. $\square$

Det återstår nu att bevisa satsen om
modellens existens. För detta ändamål
inför vi ett nytt begrepp.

Definition Låt som vanligt V beteckna
en vokabulär och F_V mängden av
formler som kan byggas upp från V .

En teori $T \subseteq F_V$ kallas för en

Henkin-teori om för varje

sats $\exists x A \in F_V$ det finns en
konstantsymbol $c \in V$ sådan att

$$T \vdash \exists x A \rightarrow A[c/x]$$

(där $A[c/x]$ betecknar den formel som fås
från A genom att byta ut varje fri
forekomst av x mot c ; se Definition 2.17
i stencil om Tarskis sanningsdefinition).

Satsen om modellexistens kommer att bevisas enligt följande plan. (11)

Notera först att om T är inkonsistent så $T \vdash A \wedge \neg A$, för något A , så varje modell av T är, enligt sundheten ^(i vårt bevissystem), en modell av $A \wedge \neg A$. Men $A \wedge \neg A$ har ingen modell, så om T är inkonsistent så kan T inte ha någon modell.

(Notera användningen av sundheten, dvs. om $T \vdash \Delta$ så $T \models \Delta$.)

Det återstår alltså att bevisa att om T är konsistent så har T en modell. Detta görs genom att bevisa följande tre resultat:

I. För varje konsistent teori $T \subseteq F_V$ så finns en vokabulär $V' \supseteq V$ och en konsistent Henkin-teori $T' \subseteq F_{V'}$ sådan att $T \subseteq T'$.

II. För varje vokabulär V och konsistent teori $T \subseteq F_V$ så finns en maximalkonsistent teori $T' \subseteq F_V$ sådan att $T \subseteq T'$.

III. Varje maximalkonsistent Henkin-teori har en modell.

Givet en konsistent teori $T \subseteq F_V$ så kan vi alltså, enligt I och II, finna en vokabulär $V' \supseteq V$ och en maximalkonsistent Henkin-teori $T' \subseteq F_{V'}$ sådan att $T \subseteq T'$. Enligt III så har T' en modell M . Eftersom $T \subseteq T'$ så är M också en modell av T .

Punkterna I-III ovan motsvarar satserna 5, 6 och 9 nedan. För att kunna bevisa dem så behöver vi ett tekniskt lemma.

Lemma 4 Antag att c är en konstantsymbol som inte förekommer i A eller i någon formel i T och låt $T' = T \cup \{\exists x A \rightarrow A[c/x]\}$.

Om c inte förekommer i B och $T' \vdash B$ så $T \vdash B$.

Bevis. Antag att c, A, T och T' uppfyller lemmats premisser, inklusive att $T' \vdash B$ och c inte förekommer i B . Vi skall visa att $T \vdash B$.

Antagandena innebär att

$$T \cup \{\exists x A \rightarrow A[c/x]\} \vdash B.$$

Enligt antagandena angående det formella bevissystemet (Antagande 1 (d)) så $T \vdash (\exists x A \rightarrow A[c/x]) \rightarrow B$.

Eftersom formella bevis endast innehåller ändligt många formler så finns en ändlig delmängd $\Delta \subseteq T$ sådan att

$$\Delta \vdash (\exists x A \rightarrow A[c/x]) \rightarrow B.$$

Låt y vara en variabel (det finns oändligt många) som inte förekommer i A , B eller i någon formel i Δ . Enligt Antagande 1(l) så

$$\Delta \vdash \forall y ((\exists x A \rightarrow A[y/x]) \rightarrow B)$$

och enligt Antagande 1(i) och (e) så

$$(*) \quad \Delta \vdash \exists y (\exists x A \rightarrow A[y/x]) \rightarrow B.$$

Enligt Antagande 1(k) så

$$\vdash \exists x A \rightarrow \exists y A[y/x]$$

och enligt Antagande 1(j) och (e) så

$$\vdash \exists y (\exists x A \rightarrow A[y/x]).$$

Antagande 1(e) tillsammans med (*) ger nu $\Delta \vdash B$. Eftersom $\Delta \subseteq \Gamma$ så $\Gamma \vdash B$, vilket skulle visas. $\square$

Sats 5 Låt V vara en vokabulär,
 låt $d_n, n \in \mathbb{N}$, vara konstantsymboler
 som inte tillhör V och låt

$$V' = V \cup \{d_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Om $T \subseteq F_V$ är en konsistent teori
 så finns en konsistent Henkin-teori
 $T' \subseteq F_{V'}$ sådan att $T \subseteq T'$.

Bevis. Låt $\alpha: F_{V'} \rightarrow \mathbb{N}$ vara en
 injektiv funktion. En sådan finns
 eftersom V antas vara uppräknelig,
 och då är även V' och $F_{V'}$ uppräkneliga.

(Kom ihåg att formler är ändliga
 följer av symboler.) Man kan även
 konstruera α explicit, men det behövs inte
 här.

Nu definierar vi induktivt $T_n \subseteq F_{V'}$,
 för $n \in \mathbb{N}$, på så sätt att

$$T = T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots$$

och bara ändligt många konstant-symboler från $V' - V$ förekommer i T_n , för varje $n \in \mathbb{N}$.

Låt $T_0 = T$.

Antag nu att T_n är definierad och att $T_0 \subseteq T_1 \subseteq \dots \subseteq T_n$ och att endast ändligt många symboler från $V' - V$ förekommer i T_n .

(a) Om det finns en sats $\exists x A \in F_{V'}$ sådan att $\alpha(\exists x A) = n$ så låt

$$T_{n+1} = T_n \cup \{ \exists x A \rightarrow A[d/x] \}$$

där $d \in V' - V$ inte förekommer i A eller i någon formel i T_n .

(b) Om ingen sats $\exists x A \in F_{V'}$ finns så att $\alpha(\exists x A) = n$ så låt $T_{n+1} = T_n$.

Det bör vara klart att följden T_n , $n \in \mathbb{N}$ uppfyller våra önskemål.

Låt nu $T' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$.

Notera att för varje sats $i \in F_v$ som har formen $\exists x A$ så

$$(\exists x A \rightarrow A[d/x]) \in T' \stackrel{\alpha(\exists x A)}{=} T'$$

För någon konstant symbol $d \in V'$.
Därmed är T' en Henkin-teori.
Det återstår att visa att T' är konsistent. För att kunna göra detta så bevisar vi först detta:

Påstående Om $B \in F_v$, $n \in \mathbb{N}$,
och $T'_n \vdash B$ så $T' \vdash B$.

Beweis av påstående. Induktion över n .

Eftersom $T'_0 = T'$ så är fallet $n=0$ trivialt. Antag nu, som induktionshypotes att

om $B \in F_v$ och $T'_n \vdash B$ så $T' \vdash B$.

Antag att $B \in F_v$ och att $T'_{n+1} \vdash B$.

Om $T'_{n+1} = T'_n$ (Fall (b) i definitionen)

så ger induktionshypotesen direkt $T' \vdash B$.

Så vi antar nu att

$$T_{n+1} = T_n \cup \{ \exists x A \rightarrow A[d/x] \}$$

där $d \in V' - V$ inte förekommer i A eller i någon formel i T_n (fall (a) i definitionen). Eftersom $B \in F_V$ så förekommer inte d i B och följande lemma säger att $T_n \vdash B$, så induktionshypotesen ger $T \vdash B$. Då har vi bevisat påståendet. $\square$

Nu vill beviset av att $T' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ är konsistent. Antag motsatsen, så $T' \vdash A \wedge \neg A$ för något A .

Antagande 1 (†) medför att

$T' \vdash A \wedge \neg A$ för något $A \in F_V$.

Eftersom formella bevis är ändliga så finns $n \in \mathbb{N}$ så att $T_n \vdash A \wedge \neg A$ och Påståendet ger $T \vdash A \wedge \neg A$ vilket motsäger antagandet att T är konsistent. Detta avslutar beviset av satsen. $\square$