

Sats 6 (Lindenbaums lemma)

För varje vokabulär V och konsistent teori $T \subseteq F_V$ så finns en maximal konsistent teori $T' \subseteq F_V$ sådan att $T \subseteq T'$.

Beweis. Låt $\alpha: F_V \rightarrow \mathbb{N}$ vara injektiv. Induktivt definierar vi nu T_n , $n \in \mathbb{N}$, enligt följande:

$$T_0 = T.$$

Antag att T_n är definierad.

Om ingen sats $A \in F_V$ existerar så att $\alpha(A) = n$, så låt $T_{n+1} = T_n$.

Om $\alpha(A) = n$ för någon ^(sats) $A \in F_V$ så

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n \cup \{A\} & \text{om } T_n \cup \{A\} \text{ är konsistent.} \\ T_n & \text{annars} \end{cases}$$

Notera att $T = T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots$
Från definitionen följer att varje

T_n är konsistent. Eftersom bevis
är ändliga så måste även $T' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$
vara konsistent.

Antag att $A \in F_V$ är en sats sådan
att $T' \cup \{A\}$ är konsistent. Då är
även $T_{\alpha(A)} \cup \{A\}$ konsistent, så

$A \in T_{\alpha(A)+1} \subseteq T'$. Detta visar
att T' är maximalkonsistent. $\square$

Nu återstår bara att visa att varje
maximalkonsistent Henkin-teori har
en modell. För detta behöver vi ett
nytt begrepp och två lemmor.

Definition Låt A vara en formel.
Vi säger att en term t är fri
för x i A om en av följande fyra
punkter stämmer:

(i) A är atomär.

(ii) A har formen $t \in B$ och t är fri för $x \in B$.

(iii) A har formen $B \square C$ där $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ och t är fri för $x \in B$ och $x \in C$.

(iv) A har formen $\forall y B$ eller $\exists y B$ och

(a) $x = y$, eller

(b) $y \notin Fv(t)$ och t är fri för $x \in B$.

Exempel x_2 är fri för $x_0 \in \exists x_3 P(x_0, x_3)$.

$\neg(x_0, x_1)$ är inte fri för $x_0 \in \exists x_1 P(x_0, x_3)$.

x_4 är fri för $x_1 \in P(x_1, x_5) \rightarrow \exists x_1 R(x_1, x_2)$.

$\neg(x_0, x_1)$ är fri för $x_0 \in \exists x_2 P(x_0, x_2)$.

(Vi antar att P och R är relationsymboler.

Observera att om c är en konstant-symbol så är c fri för $x \in A$,

för varje variabel x och formel A .

Intuitivt så uttrycker " t är fri för $x \in A$ "

att när alla fria förekomster av x i A byts ut mot t (så att man får $A[t/x]$) så blir ingen variabel i t bunden av en kvantor i A .

Låt V vara en vokabular och M en V -struktur. Begreppet M -tolkning definieras i Definition 2.6 i min stencil där formuler och strukturer introduceras.

Även ' $w[a/x]$ ' där w är en M -tolkning och $a \in \text{dom}(M)$ definieras i del (ii) av samma definition.

Lemma 7 Låt w vara en M -tolkning och t och t_1 termer.

Då gäller att $t_1[t/x]^w = t_1^{w[t^w/x]}$.

Observera att $t_1[t/x]^w$ beräknar "tolkningen med avseende på w " av

termen $t_i[t/x]$, medan $t_i^{w[t^w/x]}$ betecknar "tolkningen med avseende på $w[t^w/x]$ " av termen t_i , där

$$w[t^w/x](y) = \begin{cases} w(y) & \text{om } y \neq x \\ t^w & \text{om } y = x. \end{cases}$$

Lemma 7 bevisas med induktion över termers uppbyggnad och lämnas som övning.

Lemma 8 Om t är t_i för x i A

$$\text{så } \mathcal{M} \models_{w[t^w/x]} A \iff \mathcal{M} \models_w A[t/x]$$

För varje $\mathcal{M}$ -tolkning w .

Bevis. Induktion över formlers uppbyggnad.

Antag först att A är atomär, med formen $P(t_1, \dots, t_n)$. Enligt Lemma 7

så $t_i[t/w]^w = t_i^w[t^w/x]$ för $i=1, \dots, n$,

så $\mathcal{M} \models_{w[t^w/x]} A \iff$

$(t_1^w[t^w/x], \dots, t_n^w[t^w/x]) \in P^{\mathcal{M}} \iff$

$(t_1[t/x]^w, \dots, t_n[t/x]^w) \in P^{\mathcal{M}} \iff$

$\mathcal{M} \models_w A[t/x]$.

Fallet då A har formen $t_1 = t_2$ behandlas på samma sätt som föregående fall.

Fallen då A har formen $\neg B$ eller $B \Box C$ där $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ är inte heller svåra och lämnas övning.

Antag nu att A har formen $\forall x B$. Eftersom vi antar att t är fri för x i A så gäller att $x=y$ eller att $y \notin Fv(t)$ och t är fri för x i B .

Om $x=y$ så $x \notin Fv(A)$ och $A[t/x] = A$. Då följer, med hjälp Lemma 2.10 i stencil om Tarskis sanningsdefinition (som säger att bara w 's värden på variabler som är fria i A har betydelse) att $M \models_{w[t^w/x]} A \Leftrightarrow M \models_w A$

$$\Leftrightarrow M \models_w A[t/x].$$

Antag nu att $x \neq y$, så $x \notin Fv(t)$ och t är Li för x i B . Då gäller följande: $M \models_{w[t^w/x]} A$

$$\Leftrightarrow M \models_{w[t^w/x]} \forall y B$$

$$\Leftrightarrow M \models_{w[t^w/x][a/y]} B \text{ för alla } a \in \text{dom}(M)$$

$$\Leftrightarrow M \models_{w[a/y][t^w/x]} B \text{ för alla } a \in \text{dom}(M) \\ (\text{eftersom } x \neq y)$$

$$\Leftrightarrow M \models_{w[a/y]} B[t/x] \quad \text{för alla } a \in \text{dom}(M),$$

enligt induktionshypotesen

$$\Leftrightarrow M \models_w \forall y B[t/x]$$

$$\Leftrightarrow M \models_w A[t/x].$$

Fallet då A har formen $\exists y B$ behandlas på liknande sätt och lämnas som övning. $\square$

Nu är vi redo att visa följande.

Sats 9 Låt V vara en vokabulär och $T \subseteq F_V$ en maximal konsistent Henkin-teori. Då har T en modell.

Bes. Låt M_0 vara mängden av alla V -termer utan variabler. Definiera en relation $\sim$ på M_0 genom

$$t \sim t' \Leftrightarrow T \vdash t = t'.$$

Påstående 1 $\sim$ är en ekvivalens-
relation.

Beris Att $\sim$ är reflexiv, symmetrisk
och transitiv följer från (a) - (g)
i Antagande 1. (om det formella
bevissystemets egenskaper). $\square$

Påstående 2 Om P är en n -ställig
relationsymbol, $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n \in M_0$,
 $T \vdash P(t_1, \dots, t_n)$ och $t_i \sim t'_i$ för
 $i = 1, \dots, n$, så $T \vdash P(t'_1, \dots, t'_n)$.

Beris. Följer från Antagande 1,
med användning av bland annat del(s). $\square$

Påstående 3 Om f är en n -ställig
funktionsymbol, $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_n \in M_0$
och $t_i \sim t'_i$ för $i = 1, \dots, n$, så
 $T \vdash f(t_1, \dots, t_n) = f(t'_1, \dots, t'_n)$.

Beris. Som för Påstående 2.
(med användning av Antagande 1 (r)). $\square$

Den modell (för T) som vi skall konstruera har som domän/universum mängden av alla ekvivalensklasser till $\sim$. Låt alltså

$$M = \{[t] : t \in M_0\}$$

där $[t] = \{t' \in M_0 : t' \sim t\}$.

Mängden M är domänen till modellen $\mathcal{M}$ vars tolkningar av symboler i V vi nu skall definiera.

(a) Om $c \in V$ är en konstantsymbol så $c^{\mathcal{M}} = [c]$.

(b) Om $P \in V$ är en n -ställig relationssymbol så $P^{\mathcal{M}} =$

$$\{([t_1], \dots, [t_n]) : t_1, \dots, t_n \in M_0 \text{ och } T \vdash P(t_1, \dots, t_n)\}.$$

(c) Om $f \in V$ är en n -ställig funktionsymbol och $[t_1], \dots, [t_n] \in M$ så $f^M([t_1], \dots, [t_n]) = [f(t_1, \dots, t_n)]$.

Från Påstående 2 och 3 så följer att definitionerna i del (b) och (c) inte beror på vilka representanter för ekvivalensklasserna $[t_1], \dots, [t_n]$ som används.

Påstående 4 För varje $t \in M_0$ och varje M -tolkning $w: \{x_n: n \in \mathbb{N}\} \rightarrow M$ så $t^w = [t]$.

Beris. Induktion över termers uppbyggnad. Kom ihåg att termer i M_0 inte innehåller variabler.

Detaljerna lämnas som övning. $\square$

Nu återstår bara att visa följande.

Påstående 5 För varje sats $A \in F_V$
så $M \models A \iff A \in T$.

Beris Induktion över formers uppbyggnad.

1. Antag att A har formen $t_1 = t_2$
där $t_1, t_2 \in M_0$ (eftersom vi antar
att A är en sats, så $F_V(A) = \emptyset$).

Då gäller att

$$M \models t_1 = t_2$$

$\iff M \models_w t_1 = t_2$ för en godtycklig
 M -tolkning w ,
eftersom $F_V(t_1 = t_2) = \emptyset$.

$\iff t_1^w = t_2^w$ enligt definition av ' $\models_w$ '

$\iff [t_1] = [t_2]$ enligt Påstående 4.

$\iff t_1 \sim t_2$

$\iff T \vdash t_1 = t_2$

$\iff t_1 = t_2 \in T$ enligt Lemma 3.

2. Antag att A har formen

$P(t_1, \dots, t_n)$ där $P \in V$ och $t_1, \dots, t_n \in M_0$. På liknande sätt som i Fall 1 visas att

$$\mathcal{M} \models P(t_1, \dots, t_n) \Leftrightarrow P(t_1, \dots, t_n) \in T.$$

Detaljerna lämnas som övning.

Fallen 1 och 2 utgör basfallen i induktionen. De resterande fallen utgör induktionssteget.

3. Antag att A har formen $\neg B$ eller $B \Box C$ där $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Vart och ett av dessa fall behandlas genom att betrakta motsvarande fall i definitionen av ' $\models_w$ ', samt definitionen av ' $\models$ '. Se Definitionerna 2.8 och 2.11 i min skenil om Tarskis sanningsdefinition. Fyll i resten själv som övning.

4. Antag att A har formen $\exists x B$.

Vi visar först att $\exists x B \in T \Rightarrow M \models \exists x B$.

Så antag att $\exists x B \in T$. Eftersom T är en Henkin-teori så finns $c \in V$ så att $T \vdash \exists x B \rightarrow B[c/x]$ och eftersom T också är maximalkonsistent så medför Antagande 1 och Lemma 2 att $B[c/x] \in T$.

Induktionshypotesen ger nu $M \models B[c/x]$ så för godtyckligt w (eftersom $B[c/x]$ är sluten) så $M \models_w B[c/x]$. Eftersom c är fri för x i B så medför Lemma 8 att $M \models_{w[c^w/x]} B$ vilket ger $M \models_w \exists x B$.

Eftersom $\exists x B$ är sluten får vi $M \models \exists x B$.

Nu visar vi att $M \models \exists x B \Rightarrow \exists x B \in T$.
Antag att $M \models \exists x B$. För godtyckligt w gäller då att $M \models_w \exists x B$, så det finns $[t] \in M$ så att $M \models_{w[t]/x} B$.

Påstående 4 ger nu att $M \models_w [t^w/x] B$
 och enligt Lemma 8 så

$M \models_w B[t/x]$, för t är fri för
 x i B eftersom inga variabler finns
 i t (eftersom $t \in M_0$).

Eftersom $B[t/x]$ är sluten så har
 w ingen betydelse och vi får
 $M \models B[t/x]$. Induktionshypotesen
 ger att $B[t/x] \in T$. Eftersom
 t saknar fria variabler så medför
 Antagande 1 (m) att $T \vdash \exists x B$
 vilket ger $\exists x B \in T$ eftersom T är
 maximalkonsistent.

5. Antag att A har formen $\forall x B$.
 Enligt Antagande 1 (n) så
 $\vdash \forall x B \leftrightarrow \neg \exists x \neg B$.

Med hjälp av detta och en del
 andra resultat som vi har sett

För vi $M \models \forall x B$

$$\Leftrightarrow M \models_w \forall x B$$

För godtycklig w
(eftersom $\forall x B$ är sluten)

$$\Leftrightarrow M \models_w \neg \exists x \neg B$$

Enligt definitionen
av ' $\models_w$ '

$$\Leftrightarrow M \not\models_w \exists x \neg B$$

$$\Leftrightarrow M \not\models \exists x \neg B$$

eftersom $\exists x \neg B$ är
sluten

$$\Leftrightarrow \exists x \neg B \notin \Gamma$$

$$\Leftrightarrow \neg \exists x \neg B \in \Gamma$$

$$\Leftrightarrow \forall x B \in \Gamma.$$

Nu är beviset av Sats 9 klart. $\square$

Kommentarer / bevisen av Satserna

5 och 6, men ingen annanstans, användes antagandet att vokabulären V var uppräknelig. Satserna kan även visas, med hjälp av Zorn's lemma, utan detta antagande (se exempelvis Mathematical Logic, Part I, av Cori och Lascar). Och det finns minst

ett annat sätt att bevisa Fullständig-
hetsatsen utan antagandet att
vokabulären är uppräknelig; mer om
det längre ner.

Ett viktigt korollarium

Kompakthetsatsen

Låt T vara en teori.

Då har T en modell om och
endast om varje ändlig $\Delta \subseteq T$
har en modell.

Bevis. Antag att T inte har någon
modell. Enligt Satsen om modell-
existens så är T inkonsistent, så
 $T \vdash A \wedge \neg A$ för något A . Eftersom
formella bevis är ändliga så finns en
ändlig $\Delta \subseteq T$ så att $\Delta \vdash A \wedge \neg A$
vilket innebär att Δ är inkonsistent
och saknar modell. Om T har en

modell så är samma struktur
även en modell för varje $\Delta \subseteq T$. $\square$

Lägg märke till att kompakthets-
satsen inte talar om bevisbarhet.

Den kan också bevisas direkt, utan
begreppet formella bevis, med
hjälp av den så kallade ultra-
produktkonstruktionen (se tex.

Introduction to Model Theory av
P. Rothmaler). Man behöver då
inte antagandet att vokabulären är
uppräknelig. Eftersom bara ändligt
många symboler förekommer i en
ändlig mängd av formler så kan
kompakthetsatsen för (möjligen) över-
uppräkneliga vokabulärer tillsammans med
modell existenssatsen för uppräkneliga
vokabulärer kombineras för att bevisa
fullständighetsatsen för (möjligen)
överuppräkneliga vokabulärer.

Ett par tillämpningar av kompakthetsatsen

Exempel 1 Låt V vara en godtycklig vokabulär och låt $A \in F_V$ vara en sats (som vanligt betecknar F_V mängden av formler som kan bildas med V).

Påstående Om A har godtyckligt stora ändliga modeller så har A även en oändlig modell.

Bewis. Antag att A har godtyckligt stora ändliga modeller. Låt E_n beteckna satsen

$$\exists x_1, \dots, x_n \left(\bigwedge_{i < j} x_i \neq x_j \right),$$

och låt

$$\mathcal{T} = \{A\} \cup \{E_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$$

Det är klart att varje modell av $\mathcal{T}$ är oändlig (dvs. har oändlig domän),

och är en modell av A . Så det räcker att visa att T har en modell. Enligt kompakthetsatsen så räcker det att visa att varje ändlig $\Delta \subseteq T$ har en modell.

Så låt $\Delta \subseteq T$ vara ändlig.

Då finns n så att

$$\Delta \subseteq T_n = \{A\} \cup \{E_1, \dots, E_n\}.$$

Eftersom T har godtyckligt stora ändliga modeller så har T_n , och även Δ , en modell. $\square$

Exempel 2 Låt $V = \{0, 1, +, \cdot, <\}$ och låt $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, <^{\mathcal{N}})$ vara den struktur, med universum $\mathbb{N}$, där $0, 1, +, \cdot, <$ tolkas som vanligt. Låt $T = \{A : A \text{ är en sats i } F \text{ som är sann i } \mathcal{N}\}^V$ och låt sedan

$$T' = T \cup \left\{ \underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ gånger}} < c : n=2, 3, 4, \dots \right\}$$

där c är en ny konstantsymbol.

Lägg märke till att varje ändlig $\Delta \subseteq T$ har en modell. För strukturen $\mathcal{N}$ kan utökas så att c tolkar som ett naturligt tal, och detta tal kan väljas hur stort som helst.

Enligt kompakthetsatsen så har T en modell $\mathcal{N}'$, som också är en modell av T . Så $\mathcal{N}$ och $\mathcal{N}'$ satisfierar exakt samma satser i F_v , men $\mathcal{N}'$ innehåller (minst) ett "oändligt tal", nämligen tolkningen av c .

Övning. Visa att en sats (i 1:a ordn. logik) kan ha en oändlig modell men ingen ändlig modell.

(Kompakthetsatsen är inte till någon hjälp, men man kan konstruera satser som uppfyller kravet. Tänk exempelvis på axiomen för en linjär/total ordning som är "tät", dvs. mellan två element finns alltid ett tredje.)