Anmärkning För enkelhetens skull kommer vi ofta att bara säga formler eller slutna formler (i stället för V-formler) och om vi talar om flera formler eller strukturer samtidigt så antar vi att alla dessa är V-formler eller V-strukturer för någon vokabulär V.

Lemma 2.13

(i) Om A och B är slutna formler så $\models A \leftrightarrow B$ om och endast om för alla $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models A \Leftrightarrow \mathcal{M} \models B$.

(ii) Om $A_1, \ldots, A_n$ och A är slutna formler så $\{A_1, \ldots, A_n\} \models A$ om och endast om $\models (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to A$

Bevis. Följer lätt från definitionerna och lämnas som övning.

Exempel Låt $V = \{P\}$, där P är en 2-ställig predikatsymbol, och låt $\mathcal{M} = (M, P^{\mathcal{M}})$ där $M = \{0, 1, 2, 3\}$ och

$$P^{\mathcal{M}} = \{(0,1), (1,2), (0,3), (3,2)\}.$$

Låt w vara en $\mathcal{M}$-tolkning sådan att $w(x_0) = 3$.

Vi har $\mathcal{M} \models_w \exists x_1 P(x_0, x_1) \iff$ det finns $a \in M$ så att $\mathcal{M} \models_{w[a/x_1]} P(x_0, x_1)$.

Eftersom $(3,2) \in P^{\mathcal{M}}$ så $\mathcal{M} \models_{w[2/x_1]} P(x_0, x_1)$

vilket, enligt ovanstående, ger $\mathcal{M} \models_w \exists x_1 P(x_0, x_1)$

På samma vis kan man visa att om $w(x_0) = 0$ eller $w(x_0) = 1$ så $\mathcal{M} \models_w \exists x_1 P(x_0, x_1)$.

Om $w(x_0) = 2$ så existerar inte $a \in M$ så att $\mathcal{M} \models_{w[a/x_1]} P(x_0, x_1)$, vilket medför

att $\mathcal{M} \not\models_w \exists x_1 P(x_0, x_1)$.

Med andra ord så säger detta att om w är en (godtycklig) $\mathcal{M}$-tolkning så $\mathcal{M} \not\models_{w[2/x_0]} \exists x_1 P(x_0, x_1)$, vilket medför att $\mathcal{M} \not\models_w \forall x_0 \exists x_1 P(x_0, x_1)$.

vilket ger $\mathcal{M} \models_w \neg \forall x_0 \exists x_1 P(x_0, x_1)$.

Enligt Definition 2.11 så

$\mathcal{M} \models \neg \forall x_0 \exists x_1 P(x_0, x_1)$, dvs.

$\neg \forall x_0 \exists x_1 P(x_0, x_1)$ är sann i $\mathcal{M}$,

eller med andra ord, $\mathcal{M}$ är en modell till $\neg \forall x_0 \exists x_1 P(x_0, x_1)$.

<u>Exempel</u> Låt A vara en formel.

Vi visar att $\forall x_0 \neg A$ är ekvivalent med $\neg \exists x_0 A$. Låt $\mathcal{M}$ vara en struktur och w en $\mathcal{M}$-tolkning. Det räcker att visa att $\mathcal{M} \models_w \forall x_0 \neg A \iff \mathcal{M} \models_w \neg \exists x_0 A$.

Antag att $\mathcal{M} \models_w \forall x_0 \neg A$. Om $a \in dom(\mathcal{M})$, så gäller att $\mathcal{M} \models_{w[a/x_0]} \neg A$, dvs. $\mathcal{M} \not\models_{w[a/x_0]} A$. Alltså finns <u>inget</u> $a \in dom(\mathcal{M})$ så att $\mathcal{M} \models_{w[a/x_0]} A$ vilket, enligt Definition 2.8 (9), betyder att $\mathcal{M} \not\models_w \exists x_0 A$. Detta ger $\mathcal{M} \models_w \neg \exists x_0 A$ (enligt samma definition).

Antag nu att $\mathcal{M} \models_w \neg \exists x_0 A$. Detta ger $\mathcal{M} \not\models_w \exists x_0 A$ och alltså finns inget $a \in dom(\mathcal{M})$ så att $\mathcal{M} \models_{w[a/x_0]} A$, dvs. för alla $a \in dom(\mathcal{M})$ så $\mathcal{M} \not\models_{w[a/x_0]} A$. Detta betyder att $\mathcal{M} \models_{w[a/x_0]} \neg A$ för alla $a \in dom(\mathcal{M})$ så $\mathcal{M} \models_w \forall x_0 \neg A$.

Exempel Låt P_0 och P_1 vara 1-ställiga predikatsymboler. Vi visar att

$$\{\forall x_0(P_0(x_0) \vee P_1(x_0))\} \not\models \forall x_0 P_0(x_0) \vee \forall x_0 P_1(x_0).$$

Låt $V = \{P_0, P_1\}$. Vi behöver finna en V-struktur $\mathcal{M}$ sådan att

$$\mathcal{M} \models \forall x_0(P_0(x_0) \vee P_1(x_0)) \text{ och}$$

$$\mathcal{M} \not\models \forall x_0 P_0(x_0) \vee \forall x_0 P_1(x_0).$$

Låt $\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \{0, 1, 2, 3\}$,

$$P_0^{\mathcal{M}} = \{0, 1\} \text{ och } P_1^{\mathcal{M}} = \{2, 3\}.$$

Låt w vara en $\mathcal{M}$-tolkning.
Observera att om $a \in \{0, 1\}$ så $\mathcal{M} \models_{w[a/x_0]} P_0(x_0)$

och om $a \in \{2, 3\}$ så $\mathcal{M} \models_{w[a/x_0]} P_1(x_0)$.

Detta ger $\mathcal{M} \models_{w[a/x_0]} P_0(x_0) \vee P_1(x_0)$, för alla $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$, så $\mathcal{M} \models_w \forall x_0(P_0(x_0) \vee P_1(x_0))$.

Enligt definitionen av $\mathcal{M} \models \ldots$ och följande anmärkning så $\mathcal{M} \models \forall x_0(P_0(x_0) \vee P_1(x_0))$.

Låt w vara en $\mathcal{M}$-tolkning.
Observera nu att:

om $a \in \{0, 1\}$ så $\mathcal{M} \not\models_{w[a/x_0]} P_1(x_0)$,

om $a \in \{2, 3\}$ så $\mathcal{M} \not\models_{w[a/x_0]} P_0(x_0)$.

Alltså har vi $\mathcal{M} \not\models \forall x_0 P_0(x_0)$ och
$\mathcal{M} \not\models_w \forall x_0 P_1(x_0)$ vilket ger
$\mathcal{M} \not\models_w \forall x_0 P_0(x_0) \vee \forall x_0 P_1(x_0)$, dvs.
$\mathcal{M} \not\models \forall x_0 P_0(x_0) \vee \forall x_0 P_1(x_0$

<u>Exempel</u> Låt oss finna en struktur $\mathcal{M}$ sådan att $\mathcal{M} \models A \wedge B \wedge C$

$A = \forall x_0 \exists x_1 P(x_0, x_1)$ och

$B = \exists x_0 \neg \exists x_1 P(x_1, x_0)$.

$C = \forall x_0 \forall x_1 \forall_2 ((P(x_0, x_1) \wedge P(x_1, x_2)) \to P(x_0, x_2))$

Låt $\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \mathbb{N}$ och definiera $P^{\mathcal{M}}$ genom
$(a, b) \in P^{\mathcal{M}} \iff a < b$, för alla $a, b \in \mathbb{N}$.

Låt w vara en $\mathcal{M}$-tolkning.

Låt $a \in dom(\mathcal{M})$. Eftersom $a < a+1$ så $(a, a+1) \in P^{\mathcal{M}}$ och $\mathcal{M} \models_{w[a/x_0][a+1/x_1]} P(x_0, x_1)$ vilket ger $\mathcal{M} \models_{w[a/x_0]} \exists x_1 P(x_0, x_1)$.

Eftersom detta gäller för alla $a \in dom(\mathcal{M})$ så $\mathcal{M} \models_w \forall x_0 \exists x_1 P(x_0, x_1)$ och därmed (eftersom A är sluten) $\mathcal{M} \models A$.

För alla $a \in dom(\mathcal{M})$ så $a \nless 0$, vilket ger $\mathcal{M} \not\models_{w[0/x_0][a/x_1]} P(x_1, x_0)$. Detta betyder att $\mathcal{M} \not\models_{w[0/x_0]} \exists x_1 P(x_1, x_0)$ vilket ger $\mathcal{M} \models_{w[0/x_0]} \neg \exists x_1 P(x_1, x_0)$. Från detta får vi $\mathcal{M} \models_w \exists x_0 \neg \exists x_1 P(x_1, x_0)$ och eftersom B är sluten så $\mathcal{M} \models B$.

Låt w vara en $\mathcal{M}$-tolkning och låt $a, b, c \in dom(\mathcal{M})$.

Om $\mathcal{M} \models_{w[a/x_0][b/x_1][c/x_2]} P(x_0, x_1) \wedge P(x_1, x_2)$

så $a < b < c$ vilket medför att $a < c$ så

$$\mathcal{M} \models_{w[a/x_0][b/x_1][c/x_2]} P(x_0, x_2).$$

Detta gör

$$\mathcal{M} \models_{w[a/x_0][b/x_1][c/x_2]} (P(x_0, x_1) \wedge P(x_1, x_2)) \rightarrow P(x_0, x_2)$$

Eftersom detta gäller för alla $c \in dom(\mathcal{M})$ så

$$\mathcal{M} \models_{w[a/x_0][b/x_1]} \forall x_2 (P(x_0, x_1) \wedge P(x_1, x_2) \rightarrow P(x_0, x_2)).$$

Eftersom detta gäller för alla $b \in dom(\mathcal{M})$ så

$$\mathcal{M} \models_{w[a/x_0]} \forall x_1 \forall x_2 (P(x_0, x_1) \wedge P(x_1, x_2) \rightarrow P(x_0, x_2)).$$

Eftersom detta gäller för alla $a \in dom(\mathcal{M})$ så

$$\mathcal{M} \models_{w} \forall x_0 \forall x_1 \forall x_2 (P(x_0, x_1) \wedge P(x_1, x_2) \rightarrow P(x_0, x_2))$$

och eftersom C är sluten så $\mathcal{M} \models C$.

__Teorem 2.13__ Låt V vara en vokabulär. Om A och B är slutna V-formler och $\mathcal{M}$ en V-struktur så:

(i) $\mathcal{M} \models A \wedge B \iff \mathcal{M} \models A$ och $\mathcal{M} \models B$.

(ii) $\mathcal{M} \models A \vee B \iff \mathcal{M} \models A$ eller $\mathcal{M} \models B$.

(iii) $\mathcal{M} \models \neg A \iff \mathcal{M} \not\models A$.

(iv) $\mathcal{M} \models A \to B \iff \mathcal{M} \not\models A$ eller $\mathcal{M} \models B$.

(v) $\mathcal{M} \models A \leftrightarrow B \iff$ antingen
$\mathcal{M} \models A$ och $\mathcal{M} \models B$
eller $\mathcal{M} \not\models A$ och $\mathcal{M} \not\models B$.

__Bevis.__ Följer från Definition 2.11 och Definition 2.8. $\square$

__Teorem 2.14__ Låt A vara en predikat-logisk formel sådan att $Fv(A) \subseteq \{x_i\}$.

(i) $\models \neg \forall x_i A \leftrightarrow \exists x_i \neg A$

(ii) $\models \neg \exists x_i A \leftrightarrow \forall x_i \neg A$

(iii) $\models \forall x_i A \leftrightarrow \neg \exists x_i \neg A$

(iv) $\models \exists x_i A \leftrightarrow \neg \forall x_i \neg A$

(v) Om $Fv(A) = \emptyset$ så $\models \forall x_i A \leftrightarrow A$

(vi) Om $Fv(A) = \emptyset$ så $\models \exists x_i A \leftrightarrow A$

<u>Bevis.</u> I ett av de föregående exemplen så visade vi (ii). På liknande sätt visas (i), (iii) och (iv).

(v) Det räcker att visa att om $\mathcal{M}$ är en struktur och w en $\mathcal{M}$-tolkning så $\mathcal{M} \models_w \forall x_i A \leftrightarrow A$.

Antag att $\mathcal{M} \models_w \forall x_i A$. Då har vi $\mathcal{M} \models_{w[a/x_i]} A$ om $a \in dom(\mathcal{M})$. Eftersom $Fv(A) = \emptyset$ så medför Lemma 2.10 att $\mathcal{M} \models_w A$.

Antag nu att $\mathcal{M} \models_w A$. Lemma 2.10 medför återigen att $\mathcal{M} \models_{w[a/x_i]} A$ för varje $a \in dom(\mathcal{M})$, vilket enligt Definition 2.8 ger $\mathcal{M} \models_w \forall x_i A$.

Vi har visat att $\mathcal{M} \models_w \forall x_i A \Leftrightarrow \mathcal{M} \models_w A$, vilket enligt Definition 2.8 betyder att $\mathcal{M} \models \forall x_i A \leftrightarrow A$.

(vi) bevisas på liknande sätt. $\square$

Teorem 2.15 Låt A och B vara predikatlogiska formler.

(i) Om $Fv(A) \subseteq \{x_i, x_j\}$ så

$$\models \forall x_i \forall x_j A \leftrightarrow \forall x_j \forall x_i A$$

och $$\models \exists x_i \exists x_j A \leftrightarrow \exists x_j \exists x_i A$$

(ii) Om $Fv(A) \subseteq \{x_i\}$ och $Fv(B) \subseteq \{x_i\}$ så

$$\models \forall x_i (A \wedge B) \leftrightarrow (\forall x_i A \wedge \forall x_i B)$$

och $$\models \exists x_i (A \vee B) \leftrightarrow (\exists x_i A \vee \exists x_i B)$$

Bevis. Övning. $\square$

Definition 2.16 (Substitution i termer)

Låt t och t' vara termer. Genom induktion så definierar vi $t[t'/x_i]$.

(i) Om $t = x_j$ så $t[t'/x_i] = \begin{cases} t' & \text{om } i = j \\ x_j & \text{om } i \neq j \end{cases}$

(ii) Om $t = c$, där c är en konstant-symbol så $t[t'/x_i] = c$.

(iii) Om $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ där f är en funktionssymbol och $t_1, \ldots, t_n$ termer så $t[t'/x_i] = f(t_1[t'/x_i], \ldots, t_n[t'/x_i])$.

Med andra ord så är $t[t'/x_i]$ resultatet av att byta ut varje förekomst av x_i i t med t'.

<u>Exempel</u> Om $t = f(f(x_0, c_0), f(x_1, x_0))$ och $t' = f(x_0, x_1)$ så

$$t[t'/x_0] = f(f(f(x_0, x_1), c_0), f(x_1, f(x_0, x_1))).$$

<u>Definition 2.17</u> (Substitution i formler)

Låt A vara en formel och t en term. Vi definierar $A[t/x_i]$ induktivt på följande sätt:

(i) Om A är $t_1 = t_2$ där t_1 och t_2 är termer så är $A[t/x_i]$ formeln

$$t_1[t/x_i] = t_2[t/x_i].$$

(ii) Om $A = P(t_1, \ldots, t_n)$ där P är en predikatsymbol och $t_1, \ldots, t_n$ är termer så $A[t/x_i] = P(t_1[t/x_i], \ldots, t_n[t/x_i])$.

(iii) Om $A = \neg B$ så $A[t/x_i] = \neg B[t/x_i]$.

(iv) Om $A = B \square C$ där $\square$ är ett av konnektiven $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ eller $\leftrightarrow$ så

$$A[t/x_i] = B[t/x_i] \square C[t/x_i].$$

(v) Om $A = \forall x_j B$ så $A[t/x_i] = \begin{cases} A & \text{om } i = j \\ \forall x_j B[t/x_i] & \text{om } i \neq j \end{cases}$

(vi) Om $A = \exists x_j B$ så $A[t/x_i] = \begin{cases} A & \text{om } i = j \\ \exists x_j B[t/x_i] & \text{om } i \neq j \end{cases}$

<u>Exempel</u> Om $A = \exists x_2 (P(x_1, x_2) \wedge \exists x_1 P(x_2, x_1))$ så $A[t/x_1] = \exists x_2 (P(t, x_2) \wedge \exists x_1 P(x_2, x_1))$.