

| Vera Koponen 2009 | ①

Booleska Funktioner och Konnektiv

Kom ihåg att

$$\{s, f\}^n = \{(b_1, \dots, b_n) : b_i \in \{s, f\} \text{ för } i=1, \dots, n\}.$$

$$\text{Så } \{s, f\}^2 = \{(s, s), (s, f), (f, s), (f, f)\}.$$

En funktion $F: \{s, f\}^n \rightarrow \{s, f\}$
kallar vi för en (n -ställig) Boolesk
funktion. Om $n=2$ så säger vi att
den är "binär." Eftersom $\{s, f\}^n$
innehåller 2^n element så finns det $2^{(2^n)}$
 n -ställiga Booleska funktioner, och
fallet $n=2$ ger 16 binära Booleska
funktioner.

Varje formel A som är uppbyggd av
 n stycken atomära formler (och
konnektiv) ger upphov till en n -ställig
Boolesk funktion, som vi betecknar F_A ,

2
på sättet som illustreras genom
två exempel:

Låt först A beräkna formeln

$\neg(P \rightarrow P_2)$ där P_1 och P_2 är

atomära. Vi skriver upp sannings-
värdestabeln för A.

P_1	P_2	$\neg(P_1 \rightarrow P_2)$ A
s	s	f
s	f	s
f	s	f
f	f	f

De två vänstra kolumnerna, för P_1
och P_2 , motsvarar input och den
högra (för A) motsvarar output, så

$$F_A(s, s) = f$$

$$F_A(s, f) = s$$

$$F_A(f, s) = f$$

$$F_A(f, f) = f$$

Obs! Funktionen F_A kan bero
på i vilken ordning vi placerar
 P_1 och P_2 , från vänster till höger.
Men om de atomära formlerna
kallas $P_1, \dots, P_n$ så antar vi att de
är placerade i denna ordning
i sanningsvärdestabeln.

3

1 nästa exempel låter vi B beteckna formeln

$P_1 \wedge \neg(P_2 \leftrightarrow P_3)$ där P_1, P_2 och P_3 är atomära. Vi får nedanstående sanningsvärdestabell, där F_B beskrivs av högerkolumnen.

P_1	P_2	P_3	$\underbrace{P_1 \wedge \neg(P_2 \leftrightarrow P_3)}_B$	
s	s	s	f	$= F_B(s, s, s)$
f	s	s	f	$= F_B(f, s, s)$
s	f	s	s	$= F_B(s, f, s)$
s	s	f	s	$= F_B(s, s, f)$
f	f	s	f	$= F_B(f, f, s)$
s	f	f	f	$= F_B(s, f, f)$
f	s	f	f	$= F_B(f, s, f)$
f	f	f	f	$= F_B(f, f, f)$

Det följer att om A och B är formler som båda är upbyggda av de atomära formulerna $P_1, \dots, P_n$, så $A \overset{\text{taut}}{\iff} B$ om och endast om $F_A = F_B$.

(där vi antar att F_A och F_B är definierade enligt den beskrivna proceduren.)

(4)

Sats För varje Boolesk funktion

$G: \{s, f\}^n \rightarrow \{s, f\}$ så finns en disjunktiv normalform A sådan att

$F_A = G$ (där F_A definieras på ovan beskrivna sätt).

Eftersom en disjunktiv normalform (DNF) endast innehåller konnektiven $\wedge, \vee, \neg$ och vi har följande tautologiska ekvivalenser

$$A \vee B \stackrel{\text{taut}}{\iff} \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

$$A \wedge B \stackrel{\text{taut}}{\iff} \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$A \wedge B \stackrel{\text{taut}}{\iff} \neg(A \rightarrow \neg B)$$

så får vi också denna

Följdsats För varje Boolesk funktion

$G: \{s, f\}^n \rightarrow \{s, f\}$ så finns en formel A sådan att $F_A = G$ och endast konnektiv från mängden K förekommer i A , där K kan vara $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ eller $\{\neg, \rightarrow\}$ (exempelvis).

(5)

Därmed räcker (exempelvis) konnektiven $\neg$ och $\wedge$ för att "uttrycka" alla Booleska funktioner.

Ett exempel för illustrera varför den första satsen gäller.

Låt $G: \{s, f\}^3 \rightarrow \{s, f\}$ vara definierad genom

$$G(s, s, s) = f$$

$$G(f, s, s) = f$$

$$G(s, f, s) = s$$

$$G(s, s, f) = f$$

$$G(f, f, s) = s$$

$$G(s, f, f) = f$$

$$G(f, s, f) = s$$

$$G(f, f, f) = f$$

Vi låter P_1 , P_2 och P_3 vara atomära formler. Sedan tittar vi på de rader där G är sann. Dessa är tre stycken i detta fall, och de är utskrivna nedan.

(6)

P_1	P_2	P_3	
$G(s, f, s) = s$			$P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3$
$G(f, f, s) = s$			$\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3$
$G(f, s, f) = s$			$\neg P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$

Kolumnerna, från vänster räknat, motsvarar sanningsvärden för P_1 , P_2 och P_3 .

Och på varje rad skall vi skriva en konjunktion av literaler uppbyggda från P_1, P_2, P_3 som är sann för denna sanningsvärdestilldelning för P_1, P_2, P_3 .

Detta är gjort i tabellen ovan.

Till sist bildar vi disjunktionen av formlerna i högerkolumnen:

$$(P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3) \vee (\neg P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3).$$

Om A betecknar denna formel så gäller att $F_A = G$. För A är sann om och endast någon av dess disjunker är sann, och dessa beskriver exakt de tupler $(b_1, b_2, b_3) \in \{s, f\}^3$

För vilka $G(b_1, b_2, b_3) = s$.

7

Sheffers streck

Låt oss införa ett nytt konnektiv,
betecknat ' $|$ ', med följande sannings-
värdestabell:

P	Q	$P Q$
s	s	f
s	f	s
f	s	s
f	f	s

Man kallar ' $|$ ' för "Sheffers streck", och
det går att verifiera att

$$\neg P \stackrel{\text{taut}}{\iff} P|P$$

$$\text{och } P \wedge Q \stackrel{\text{taut}}{\iff} (P|Q)|(P|Q).$$

Från följdsatsen ovan följer att för varje
Boolesk funktion G så finns en formel
 A sådan $F_A = G$ och A är uppbyggd

endast med hjälp av Sheffers streck.

En konsekvens är att för varje Formel B som är uppbyggd med de vanliga konnektiverna $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ så finns en Formel A som är tautologiskt ekvivalent med B och är uppbyggd endast med hjälp av 1 .

Nackdelen med få konnektiv är dock att man för det mesta behöver stora och komplicerade formler för att uttrycka saker som är mycket lättare att uttrycka om man får använda fler konnektiv.