

Satsers modeller, övningar/exempel

Vera Koponen 2009

①

1. Låt vokabulären vara $V = \{R\}$ där R är en 2-ställig relationsymbol.

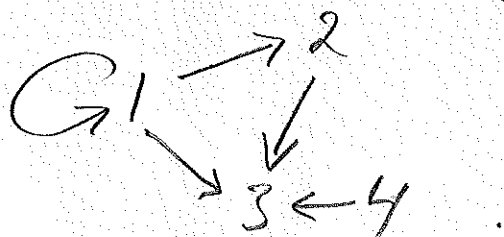
Nedan beskrivs två V -strukturer/modeller $\mathcal{M}$ och $\mathcal{N}$, först formellt, sedan mera informellt som riktade grafer.

$\mathcal{M}$ har universumet $\{1, 2, 3, 4\}$

och tolkningen av R är

$$R^{\mathcal{M}} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 3)\}$$

Med figur (riktad graf):



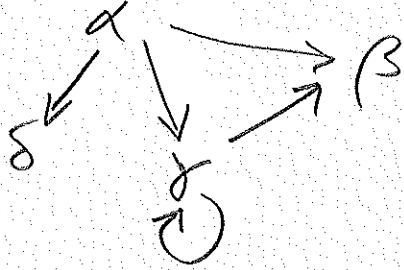
$\mathcal{N}$ har universumet $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

och tolkningen av R är

$$R^{\mathcal{N}} = \{(\alpha, \delta), (\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\gamma, \beta), (\gamma, \gamma)\}$$

(2)

Med figur:



- (a) Ange en sats i FOL som är sann i $\mathcal{M}$ och falsk i $\mathcal{N}$.
- (b) Ange en sats i FOL som är sann i $\mathcal{N}$ och falsk i $\mathcal{M}$.

Genom att använda följande:

Låt fortfarande vokabulären vara $V = \{R\}$, men vi definierar nu $\mathcal{M}$ och $\mathcal{N}$ annorlunda.

$\mathcal{M}$ har universumet $\{1, 2, 3\}$ och $R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 3)\}$

Med figur $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

$\mathcal{N}$ har universumet $\{\alpha, \beta, \gamma\}$

och $R^{\mathcal{N}} = \{(\alpha, \beta), (\beta, \gamma)\}$

Med figur

$$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma.$$

Uppenbarligen så ser $\mathcal{M}$ och $\mathcal{N}$ väldigt lika ut. Kan det finnas någon sats i FOL som är sann i $\mathcal{M}$ och falsk i $\mathcal{N}$ (eller omvänt)?

Svaret är nej, så med andra ord är exakt samma satser samma i $\mathcal{M}$ som i $\mathcal{N}$. Anledningen är just att $\mathcal{M}$ och $\mathcal{N}$ är likadana, bortsett från vilka elementen i deras universa är. Man kan ge en exakt definition av vad som menas med att två strukturer är "likadana", eller "isomorfa" som man säger. Jag går inte in på detta i den här kursen, men i grova drag

(4)

så säger man att två strukturer M och N (med samma vokabulär V) är isomorfa om det finns en bijektion från M 's universum till N 's universum som "bevarar" ^(i respektive struktur) tolkningarna av alla symboler i vokabulären. Om M och N är isomorfa så är exakt samma satser sanna i M som i N .

Det finns dock många exempel på ^{oändliga} strukturer M och N sådana att M och N inte är isomorfa och exakt samma satser i FOL är sanna i M som i N (mer om detta i kursen Logik II).

Nedan följer ett antal (mer avancerade) övningar, med svar på slutet.

(5)

Om V är en vokabulär (dvs. mängd av icke-logiska symboler), så är en V -struktur, eller V -modell, en struktur/modell i vilken alla symboler i V har tolkningar (men inga andra icke-logiska symboler än de i V).

Om A är en sats och A är sann i en struktur/modell M så kallas M för en modell av/till A .

2. Låt $V = \emptyset$. Beskriv alla (olika) V -modeller^(till) var och en av satserna:

$$A: \exists x \exists y \exists z \forall u (u = x \vee u = y \vee u = z)$$

$$B: \exists x \exists y \exists z (\neg x = y \wedge \neg x = z \wedge \neg y = z) \\ \wedge \forall u (u = x \vee u = y \vee u = z)$$

$$C: \exists x \exists y \exists z (\neg x = y \wedge \neg x = z \wedge \neg y = z)$$

(6)

3. Låt $V = \{R, a\}$ där R är en 2-ställig relationssymbol.
Beskriv alla V -modeller till var och en av satserna:

$$\begin{aligned}
 A: & \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \wedge \forall x \neg R(x, x) \\
 & \wedge \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \forall y (y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3 \vee y = x_4) \\
 & \wedge \exists x \exists y (R(a, x) \wedge R(a, y) \wedge \forall z (R(a, z) \rightarrow (z = x \vee z = y))) \\
 & \wedge \forall x (x = a \vee R(x, a) \vee \exists y (R(a, y) \wedge R(y, x))) \\
 & \wedge \neg \exists x \exists y \exists z (R(x, y) \wedge R(y, z) \wedge R(z, x))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B: & \neg R(a, a) \wedge \forall x (\neg x = a \rightarrow (R(a, x) \wedge \neg R(x, a))) \\
 & \wedge \forall x \forall y ((\neg x = a \wedge \neg y = a) \rightarrow \neg R(x, y))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C: & \forall x \neg R(x, x) \wedge \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \\
 & \wedge \exists x (R(x, a) \wedge \forall y ((\neg y = a \wedge \neg y = x) \rightarrow (R(y, a) \vee R(y, x)))) \\
 & \wedge \neg \exists x \exists y \exists z (R(x, y) \wedge R(y, z) \wedge R(z, x)) \\
 & \wedge \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \forall y (y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3 \vee y = x_4)
 \end{aligned}$$

4. En binär relation kallas för ekvivalensrelation om den har egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet.*

Låt $V = \{R\}$ där R är en 2-ställig (binär) relationsymbol.

(a) Skriv en sats i FOL som uttrycker att R är en ekvivalensrelation.

(b) Beskriv alla V -modeller till satsen i (a)-delen som har exakt 4 element (i sitt universum).

mera
↓

* reflexivitet, symmetri och transitivitet förklarades i Algebra I; se dess kurslitteratur

5. Låt $V = \{R\}$, där R är en 2-ställig relationssymbol. (8)

a) Beskriv alla V -modeller som har högst 6 element (i sitt universum) till satsen

$$\begin{aligned} & \forall x \exists y (R(x, y) \wedge \forall z (R(x, z) \rightarrow z = y)) \\ & \wedge \forall x \exists y (R(y, x) \wedge \forall z (R(z, x) \rightarrow z = y)) \\ & \wedge \neg \exists x R(x, x) \wedge \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x)) \end{aligned}$$

b) Försök att beskriva alla ändliga V -modeller till satsen i a-delen

c) Beskriv en oändlig V -modell till satsen i a-delen.

mer
↓

(9)

6. Låt $V = \{R, a\}$ där R är en binär relationssymbol.

(a) Beskriv en modell till satsen

$$\forall x \exists y (R(x, y) \wedge \forall z (R(x, z) \rightarrow z = y))$$

$$\wedge \neg \exists x R(x, a) \wedge \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x))$$

$$\wedge \neg \exists x \exists y \exists z (R(x, z) \wedge R(y, z) \wedge \neg x = y)$$

$$\wedge \neg \exists x R(x, x).$$

(b) Har satsen i a-delen någon ändlig modell?

7. Låt $V = \{f\}$ där f är en 1-ställig ("unär") funktionssymbol.

(a) Skriv en sats i FOL som uttrycker att f är bijektiv. Beskriv alla V -modeller till satsen som har exakt 5 element. ($f(\alpha) = \beta$ kan uttryckas med $\alpha \rightarrow \beta$ så vi kan använda riktade grafer.)

(b) Skriv en sats i FOL som uttrycker att f är injektiv men inte surjektiv. Beskriv sedan en modell till satsen. Har satsen någon ändlig modell?

8. Låt $V = \{*, e\}$, där $*$ är en binär (2-ställig) funktions-symbol. Beskriv alla V -modeller till satsen:

$$\begin{aligned} & \exists x_1, \exists x_2, \exists x_3, \forall y (y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3) \\ & \wedge \forall x \forall y \forall z ((x * y) * z = x * (y * z)) \\ & \wedge \forall x \exists y (x * y = e \wedge y * x = e) \\ & \wedge \forall x (x * e = x \wedge e * x = x). \end{aligned}$$

Ledning: Den första konjunkten säger att alla modeller har högst 3 element. Ett sådant y som påstås finnas i den tredje konjunkten måste vara unikt, för om $x * y = e$, $y * x = e$ och $x * z = e$ så $y * (x * y) = y * (x * z)$ vilket ger $(y * x) * y = (y * x) * z$ och därmed $e * y = e * z$ och till sist $y = z$.

Men hur skall vi beskriva modellerna nu när vi har en binär funktionsymbol?

Låt oss kalla '*' för "multiplikation", och låt oss tänka oss att vi har en modell av satsen med ^(exakt) tre element α, β, γ där konstantsymbolen e tolkas som α . Då beskrivs modellen fullständigt av sin "multiplikationstabell":

$*$	$\overset{e}{\alpha}$	β	γ
$e = \alpha$	x	x	x
β	x	x	x
γ	x	x	x

På varje plats (dvs "kryss") i tabellen skall man fylla i ett element från mängden $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ på ett sådant sätt att satsen (i början av uppgiften) blir sann. Det visar sig att det bara finns ett sätt. Även i fallen då vi betraktar en modell med exakt ett eller två element så finns bara en möjlighet.

Strukturer som uppfyller andra, tredje och fjärde konjunkten, men inte nödvändigtvis den första, kallas för "grupper". Om n inte är ett primtal, så finns två eller fler olika grupper med n element.