

Svar/lösningar till uppgifterna

1. (a) $\exists x \forall y R(y, x)$ är sann i M och falsk i N .

(b) Från (a)-delen följer att $\neg \exists x \forall y R(y, x)$ är sann i N och falsk i M .

2. En V -modell där V är som given i uppgiften^(dvs tom) har bara den vanliga tolkningen av '=' (och inga tolkningar av andra symboler). Satsen A uttrycker att det finns högst tre olika element (för inget hindrar att x, y eller z är lika). Så V -modellerna till A är de icke-tomma mängder som innehåller högst tre element. (Vi har konventionen att strukturers universa aldrig är tomma.)

V -modellerna till B är de mängder som innehåller exakt tre olika element.

V -modellerna till C är de mängder som innehåller minst tre olika element.

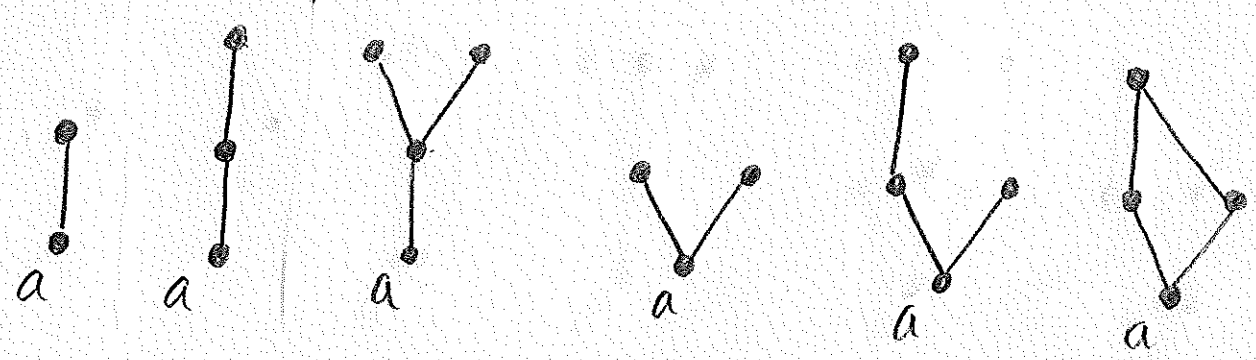
3. Om α och β är element från en modell M 's universum så uttrycker vi ' $(\alpha, \beta) \in R^M$ ' med ' $\alpha \rightarrow \beta$ '.

Den 1:a konjunkten i A säger att om $\alpha \rightarrow \beta$ så $\alpha \leftarrow \beta$.

Låt $\alpha - \beta$ betyda $\alpha \rightleftarrows \beta$.

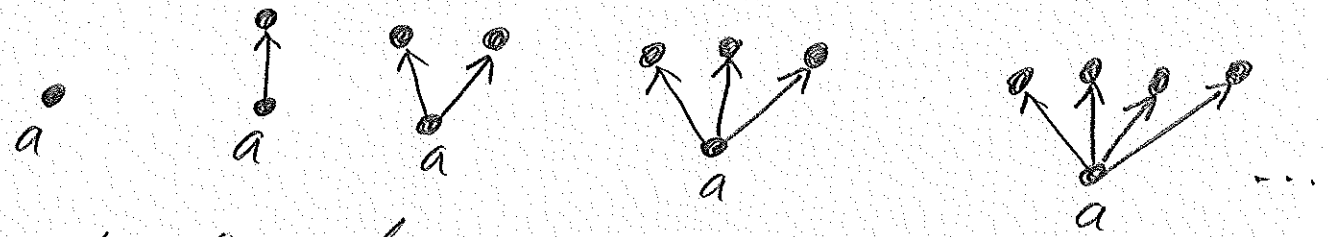
Den 3:e konjunkten säger att en modell av A har högst 4 element.

De övriga konjunkterna medför att varje V -modell till A kommer att se ut som en av följande:



där punkterna representerar element i strukturens universum. (Alla vridningar och speglingar av en figur representerar samma modell.)

Varje ^(ändlig) V-modell till B ser ut som en av följande:



och så vidare.

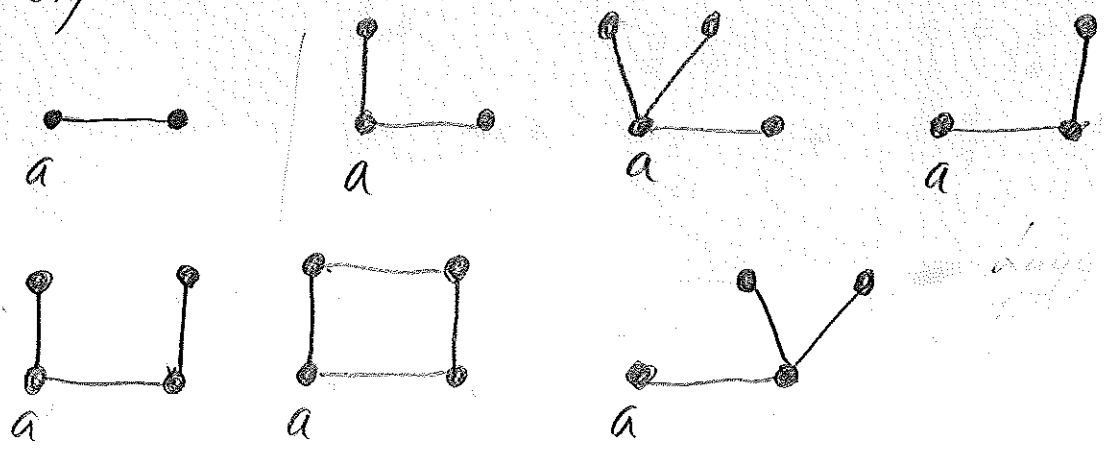
Varje modell ^(M) till B (ändlig eller ej) kan beskrivas så här:

M :s universum är

$\{\alpha\} \cup X$ där a tolkas som α (dvs $a^M = \alpha$) och X är vilken mängd som helst sådan att $\alpha \notin X$.

$$R^M = \{(\alpha, x) : x \in X\}.$$

Varje V-modell till C ser ut som en av följande:



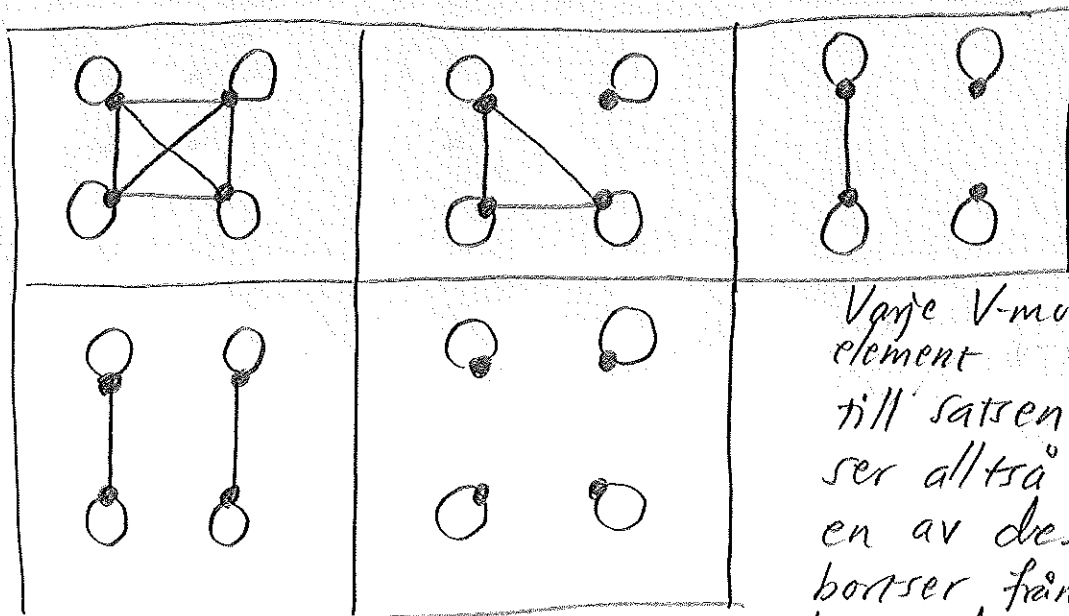
Lägg märke till att de flesta, men inte alla, modellerna till C också är modeller till A.

4. (a) Följande sats uttrycker att R är en ekvivalensrelation:

$$\forall x R(x, x) \wedge \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \\ \wedge \forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z)).$$

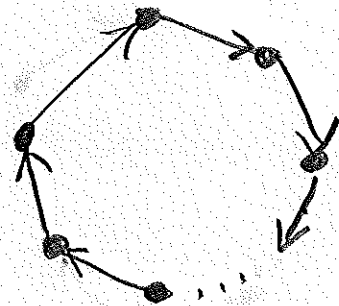
(b) Vi fortsätter med samma konventioner som i föregående uppgift om hur pilar och linjer/kurvor skall tolkas.

Då kan alla V -modeller (där $V = \{=, R\}$) med exakt 4 element till satsen i a-delen beskrivas så här:



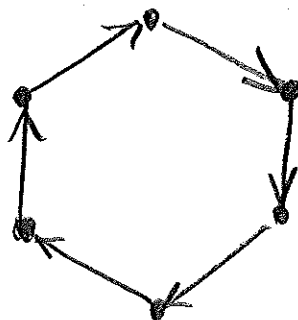
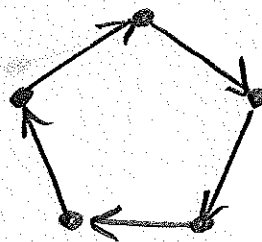
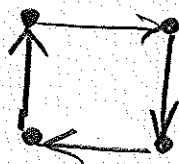
V varje V -modell med 4 element till satsen i a-delen ser alltså ut som en av dessa (om vi bortser från att man kan vrida och vända på figurerna).

5. Låt oss kalla en V -struktur (5)
 (där $V = \{R\}$, R binär och
 ' $\alpha \rightarrow \beta$ ' betyder " $R(\alpha, \beta)$ är sant")
 på formen



för en "cykel".

(a) Varje V -modell med högst 6
 element till satsen i uppgiften
 har en av följande utseenden:



(6)

b) Varje ändlig modell av satsen är en union av ändligt många disjunkta cykler (dvs. olika cykler har inga gemensamma element).

c) En oändlig modell M av satsen kan definieras så här:

M 's universum är $\mathbb{Z}$, och

$$R^m = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Med figur:

$$\dots \rightarrow -2 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$$

6 (a) Om M 's universum är

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad a^m = 0$$

$$\text{och } R^m = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\},$$

så är M en modell till satsen i uppgift 6.

(b) Satsen har ingen ändlig modell, vilket nu förklaras.

Om $\alpha \rightarrow \beta$ (dvs " $R(\alpha, \beta)$ är sant") så kallar vi α för "föregångare" till β och β för efterföljare till α . Satsen uttrycker att varje element har en unik efterföljare, att a saknar föregångare och att varje element har högst en föregångare.

Antag att M är en modell av satsen vars universum är M . Låt $\alpha_0 = a^M$. Då har α_0 en efterföljare $\alpha_1 \neq \alpha_0$ (satsen säger att $\alpha_1 \neq \alpha_0$), som i sin tur har en efterföljare $\alpha_2 \neq \alpha_1$, osv. Efter n steg har vi fått en följd $\alpha_0 \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n$.

Är det möjligt att $\alpha_i = \alpha_j$ om $i \neq j$. Svaret är nej, eftersom 'ja' skulle innebära att $\alpha_0 = a^M$ har en

(8)

en föregångare eller att något α_k har två olika föregångare; båda fallen förbjuds av satsen.

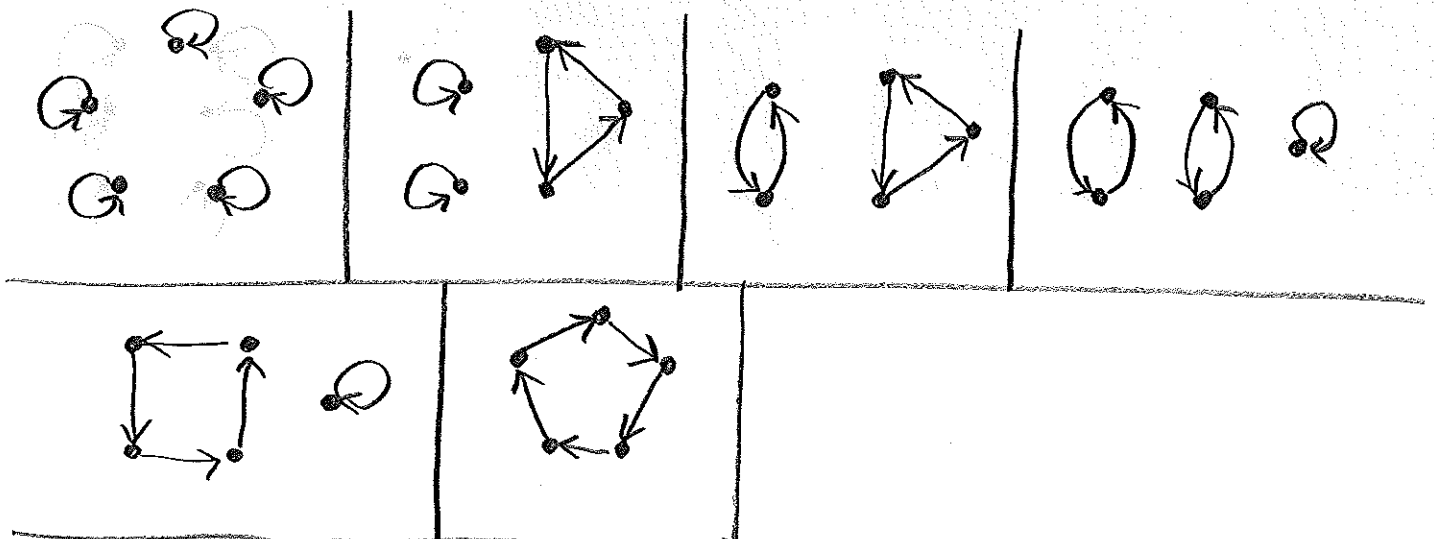
Eftersom varje element har en efterföljare så får vi en oändlig följd av olika element i M :

$$\alpha_0 \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \dots$$

7. (a) $A: \forall x \forall y (\neg x=y \rightarrow \neg f(x)=f(y))$
 $\wedge \forall x \exists y (f(y)=x)$

(b) uttrycker att f är bijektiv.

Om ' $\alpha \rightarrow \beta$ ' betyder ' $f(\alpha) = \beta$ ' så kan alla V -modeller av A med exakt 5 element beskrivas så här:



$$(b) \quad \forall x \forall y (\neg x=y \rightarrow \neg f(x)=f(y)) \\ \wedge \exists y \forall x \neg f(x)=y.$$

En modell M av satsen:

Låt M 's universum vara $\mathbb{N}$
och låt $f^M(n) = n+1$ för varje $n \in \mathbb{N}$.

Satsen har ingen ändlig modell,
vilket kan bevisas på ungefär samma
sätt som gjordes i lösningen till
föregående uppgift.

8. I ledningen visade vi att för varje
element α i en modell $\mathcal{M}$ av satsen så
finns ett unikt β så att $\alpha * \beta = e^M$.
Vi kallar sådant β inversen till α .
Varje V -struktur (där $V = \{*, e\}$)
bestäms av sin "multiplikationstabell".

Antag att M är en modell av satsen
med universum $\{\alpha\}$. Då gäller $e^M = \alpha$
och $\alpha *^M \alpha = \alpha$. Ingen annan möjlighet
finns.

Antag nu att M är en modell till satsen med universum $\{\alpha, \beta\}$ där $e^M = \alpha$. Pga varje element har en invers och $\alpha *^M \beta = e^M *^M \beta = \beta$ och $\beta *^M \alpha = \beta *^M e^M = \beta$, så måste multiplikationstabellen se ut så här

$*^M$	α	β
α	α	β
β	β	α

Antag nu att M är en modell av satsen med universum $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ där $e^M = \alpha$. ^(och α, β och γ är olika) För enkelhets skull skriver vi i fortsättningen $*$ i stället för $*^M$ och e i stället för e^M .

Första raden ^(och första kolumnen) måste se ut så är

$*$	e	β	γ
e	e	β	γ
β	β		
γ	γ		

pga egenskaperna som e har (som beskrivs av satsen).

Vi tittar nu på andra raden. Vad skall $\beta * \beta$ vara?

Vi kan inte ha $\beta * \beta = \beta$, för om $\beta^{-1} \in \{e, \beta, \gamma\}$ är inversen till β så

$$\begin{aligned}\beta * \beta = \beta &\Rightarrow (\beta * \beta) * \beta^{-1} = \beta * \beta^{-1} \\ &\Rightarrow \beta * (\beta * \beta^{-1}) = \beta * \beta^{-1} \\ &\Rightarrow \beta * e = e \Rightarrow \beta = e\end{aligned}$$

vilket motsäger antagandet $\beta \neq e$.

Är det möjligt att $\beta * \beta = e$?

Om detta gäller så är β den unika inversen till β och då måste vi ha $\beta * \gamma \neq e$.

Om $\beta * \gamma = \beta$ så får vi $\gamma = e$ (genom att multiplicera båda leden med inversen till β) vilket motsäger att $\gamma \neq e$.
Om $\beta * \gamma = \gamma$ så får vi $\beta = e$ (genom att multiplicera båda leden med inversen till γ) vilket motsäger att $\beta \neq e$. Alltså måste $\beta * \gamma = e$ och därmed måste $\beta * \beta \neq \alpha$.

Enda möjligheten är alltså

$\beta * \beta = \gamma$. Och vi har redan kommit fram till att $\beta * \gamma = e$.

Nu vet vi hur andra raden i tabellen måste se ut. På liknande sätt kan man resonera för att få fram tredje raden och kommer på så sätt fram till att tabellen måste ha utseendet

$*$	e	β	γ
e	e	β	γ
β	β	γ	e
γ	γ	e	β

(Kom ihåg att ' α ' också beräknas med ' e ')

Vi har nu visat att om M är en model a satsen i uppgiften och M 's universum har tre element så måste tabellen för $*$ se ut som ovan.

Men vi har inte visat att satsen verkligen har en modell. ^{med tre element} Detta följer dock om vi kan visa att om $*$ definieras som i

tabellen så är satsen uppfylld.

Från tabellen är det klart att 'e' har de önskade egenskaperna och att varje element har en invers.

Men är det så att $(x * y) * z = x * (y * z)$ alltid gäller om $*$ är given av tabellen?

Svaret är ja, vilket kan kontrolleras genom att betrakta tabellen. Eller så visar man att satsen har en modell med tre element på helt annat sätt.

Låt $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ vara universum till en modell $\mathcal{M}$ och låt, för alla

$i, j \in \mathbb{Z}_3$, $i *^{\mathcal{M}} j =$ resten då $i + j$ delas med 3. Låt också $e^{\mathcal{M}} = 0$.

Då är det inte svårt att inse att $\mathcal{M}$ är en modell till satsen i uppgiften.