

Satslogiska slutledningar:

Ge formellt bevis om de är valida,
eller motexempel om de inte är det.

Övningar:

$$a) \left| \begin{array}{l} A \rightarrow (B \rightarrow C) \\ B \\ \hline A \rightarrow C \end{array} \right.$$

$$b) \left| \begin{array}{l} A \rightarrow (B \rightarrow C) \\ \neg B \\ \hline A \rightarrow \neg C \end{array} \right.$$

$$c) \left| \begin{array}{l} A \vee \neg B \\ B \\ A \rightarrow C \\ \hline C \end{array} \right.$$

$$d) \left| \begin{array}{l} A \vee \neg B \\ B \\ \neg C \rightarrow \neg A \\ \hline C \end{array} \right.$$

$$e) \left| \begin{array}{l} A \vee \neg B \\ \neg A \\ B \rightarrow C \\ \hline C \end{array} \right.$$

$$f) \left| \begin{array}{l} A \vee \neg B \\ B \\ \neg A \\ \hline C \end{array} \right.$$

$$g) \left| \begin{array}{l} A \vee \neg B \\ B \\ \neg C \\ \hline A \rightarrow C \end{array} \right.$$

$$h) \left| \begin{array}{l} A \vee \neg B \\ B \\ C \\ \hline A \rightarrow C \end{array} \right.$$

$$i) \quad \begin{array}{|l} A \leftrightarrow \neg B \\ B \vee C \\ \hline A \leftrightarrow (\neg B \wedge C) \end{array}$$

$$j) \quad \begin{array}{|l} A \leftrightarrow B \\ B \vee C \\ \hline A \leftrightarrow (B \wedge \neg C) \end{array}$$

Lösningar När det gäller slutledning-
ar som de ovan givna, där inga
kvantorer förekommer, och A, B, C inte
har givits någon speciell betydelse,
så kan man ta reda på om de
är valida med hjälp av sannings-
värdestabell (eller semantiskt träd).

Men det kan gå fortare, om man har
övat, att resonera informellt för
att förstå om slutledningen är
valid eller inte. På detta sätt kan
man komma fram till ^(en) sanningsvärdes-
tilldelning som gör premisserna
sanna och slutsatsen falsk (ett
motexempel) om slutledningen inte är
valid, eller ett formellt bevis om
den är valid.

a) / denna första övning skriver jag upp hela tabellen:

3

A	B	C	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$		B	$A \rightarrow C$
s	s	s	s	s	s	s
f	s	s	s	s	s	s
s	f	s	s	s	f	s
s	s	f	f	f	s	f
f	f	s	s	s	f	s
s	f	f	s	s	f	f
f	s	f	s	f	s	s
f	f	f	s	s	f	s

Vi ser att på varje rad där alla premisser är sanna, så är slutsatsen $(A \rightarrow C)$ också sann. Därmed är

$A \rightarrow (B \rightarrow C)$
 B
 $\vdash A \rightarrow C$

valid, och enligt fullständighetssatsen så finns ett formellt bevis av slutledningen. Ett formellt bevis kan se ut så här:

1		$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	
2		B	
3			A
4		$B \rightarrow C$	1, 3, $\rightarrow$ Elim
5		C	2, 4, $\rightarrow$ Elim
6		$A \rightarrow C$	3-5, $\rightarrow$ Intro

/ Föreläsningen så kommer jag inte
 att skriva upp hela sanningsvärdes-
 tabeller, utan bara ange en
 sanningsvärdestilldelning som är ett
 motexempel till slutledningen om
den inte är valid, eller ett formellt
 bevis av slutledningen om den är
valid. Jag kommer i det senare
 fallet inte att skriva ut rad-
 eller regelhänvisningar utan lämnar
 detta som övning. För övrigt så
 är det ingen större poäng med att bara
 läsa lösningar. Man måste öva själv.

b) Inte valid.

Not exempel: $A:s, B:\neq, C:s.$

c) Valid.

$A \vee \neg B$	
B	
$A \rightarrow C$	
A	$ $
A	
$\neg B$	$ $
$\perp$	
A	$ $
A	
C	$ $
C	

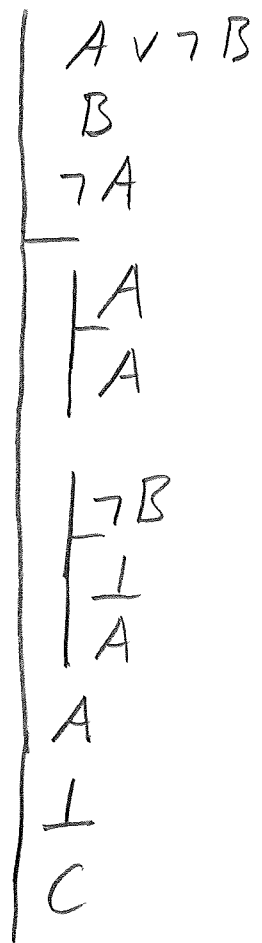
d) Valid.

	$A \vee \neg B$
	B
	$\neg C \rightarrow \neg A$
	A
	A
	$\neg B$
	$\perp$
	A
A	
	$\neg C$
	$\neg A$
	$\perp$
$\neg \neg C$	
C	

e) Inte valid.

Notexempel: $A: \text{f}, B: \text{f}, C: \text{f}.$

f) Valid (men inte sund).



g) Inte valid.

Notexempel: $A: \text{s}, B: \text{s}, C: \text{f}.$

h) Valid.

$A \vee \neg B$	
B	
C	
A	
$\neg C$	(Reit)
$A \rightarrow C$	

i) Valid.

$A \leftrightarrow \neg B$	
$B \vee C$	
A	
$\neg B$	
B	
$\perp$	
C	
C	
$\neg C$	
C	
$\neg B \wedge C$	
$\neg B \wedge C$	
$\neg B$	
A	
$A \leftrightarrow (\neg B \wedge C)$	

j) Invalid.

Not example:

$A: s, B: s, C: s.$