

# Semantiska träd

Vera Koponen  
2009

①

Antag att vi vill avgöra om en satslogisk formel är satisfierbar (TT-possible) eller om den är en tautologi. Om formeln är uppbyggd från  $n$  atomära formuler så kommer dess sanningsvärdestabell att ha  $2^n$  rader ( $2^4=16, 2^5=32, 2^6=64, \dots, 2^{10}=1024, \dots, 2^{100} > 10^{30}, \dots$ ). Det finns metoder som ofta (men inte alltid) ger svar på frågan om satisfierbarhet snabbare, t.ex. "semantiska träd".

Antag att vi vill avgöra om den satslogiska formeln  $S$  är satisfierbar. Vi placerar då  $S$  överst i ett semantiskt träd och tillämpar "nedbrytningsregler" på  $S$  och alla dess delformuler, utom de som är literaler (dvs.  $P$  eller  $\neg P$  för atomär  $P$ ).

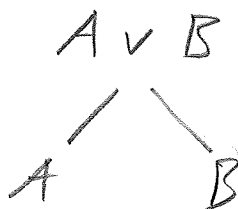
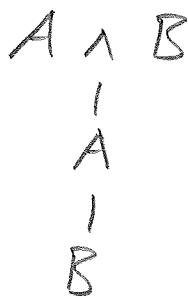
(2)

För enkelhets skull så kommer vi bara att betrakta formler som är uppbyggda med (endast) konnektiven  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ .

Notera att om  $A \wedge B$  är sann så måste både  $A$  och  $B$  vara sanna.

Och om  $A \vee B$  är sann så måste minst en av  $A$  eller  $B$  vara sann.

Detta motiverar följande nedbrytningsregler:



Tanken är att formeln överst i trädet är sann om och endast om alla formler på minst en av grenarna är sanna.

(3)

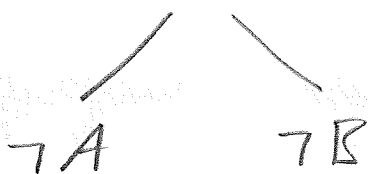
Från de tautologiska ekivalenserna

$$\neg(A \wedge B) \stackrel{\text{taut}}{\iff} \neg A \vee \neg B \quad \text{och}$$

$$\neg(A \vee B) \stackrel{\text{taut}}{\iff} \neg A \wedge \neg B$$

och ovan beskrivna idé får vi också följande nedbrytningsregler:

$$\neg(A \wedge B)$$



$$\neg(A \vee B)$$



Vi behöver också nedbrytningsregeln

$$\neg\neg A$$



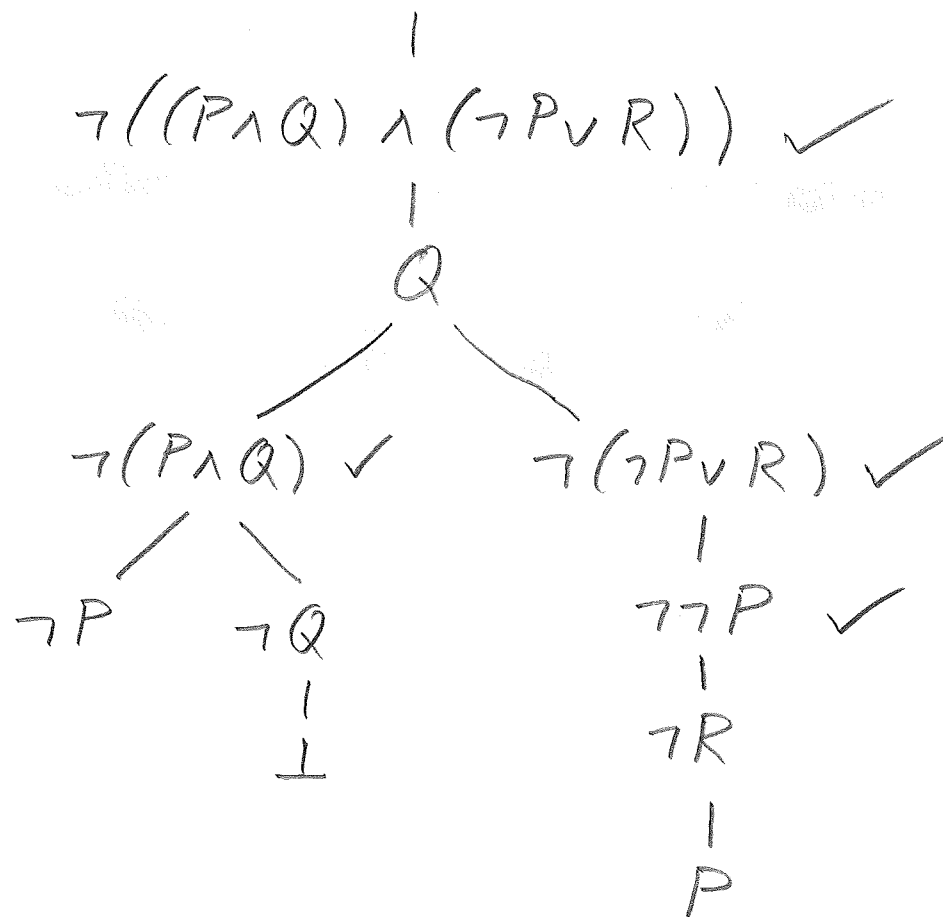
Med de givna (fem) nedbrytningsreglerna kan varje satslogisk formel som är uppbyggd (endast) av konnektiven  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$  brytas ned till dess literala beståndsdelar.

När en nedbrytningsregel har använts på en formel i trädet så markerar vi detta med '✓'.

Vi illustrerar proceduren med formeln ④

$$S: \neg((P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee R)) \wedge Q$$

$$\neg((P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee R)) \wedge Q \quad \checkmark$$



När alla sammansatta formler som inte är literaler är markerade (dvs. nedbruna) så är vi klara. Om en gren innehåller både  $A$  och  $\neg A$  för någon formel  $A$  så markeras detta med ' $\perp$ ' längst ner, och grenen kallas för motsägelsetull. Varje gren som inte är motsägelsetull (om sådan finns) ger

upphov till en sanningsvärdestill-  
delning som gör alla formlerna på  
den grenen, inklusive formeln överst  
i trädet, sanna.

(5)

I exemplet ovan finner vi två grenar  
som inte är motsägelsefulla och där-  
med finns minst två sanningsvärdes-  
tilldelningar som gör  $S$  sann.

Dessa sanningsvärdestilldelningar för  
man fram genom att tilldela sannings-  
värden till de på grenen förekommande  
atomära formlerna så att alla literaler  
på grenen blir sanna.

De två motsägelsefria grenarna i exemplet  
ger oss följande sanningsvärdestilldelningar:

$$P = \text{f} \quad$$

$$Q = \text{s} \quad$$

$$R = \text{vad som helst}$$

och

$$P = \text{s} \quad$$

$$R = \text{f} \quad$$

$$Q = \text{s}$$

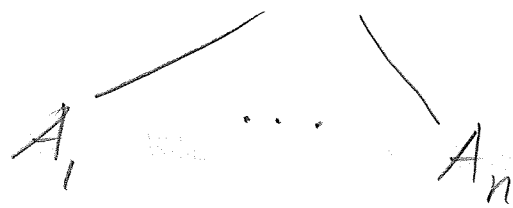
6

För att förenkla proceduren så inför vi också följande generaliserade nedbrytningsregler:

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n$$



$$A_1 \vee \dots \vee A_n$$



$$\neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$$



$$\neg(A_1 \vee \dots \vee A_n)$$



Låt nu  $T$  beräkna formeln

$$\neg((P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$$

Vi avgör om  $T$  är satisfierbar med hjälp av ett semantiskt träd.

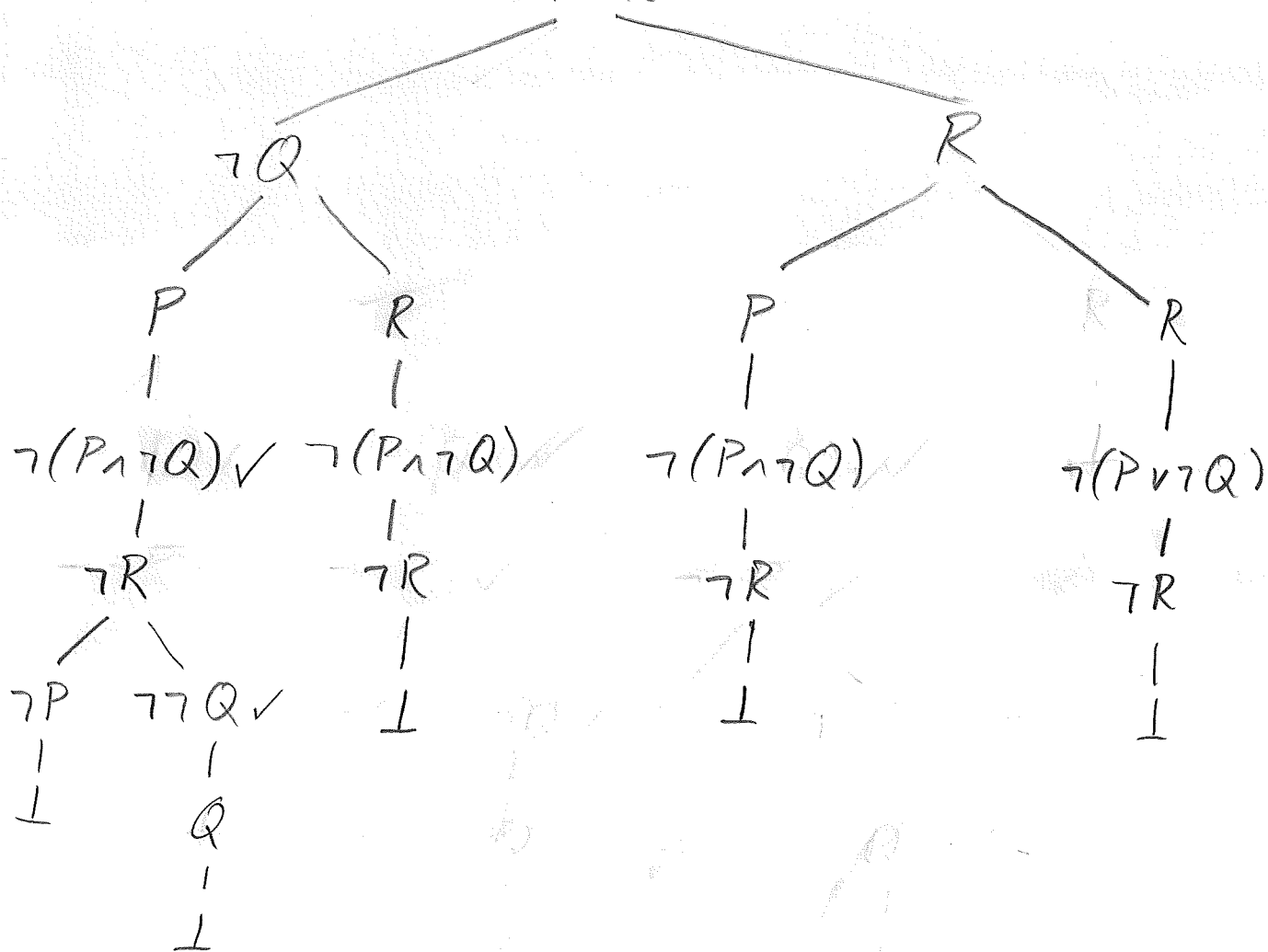
(7)

$$\neg((P \wedge \neg Q) \vee R) \wedge (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \quad \checkmark$$

$$\neg((P \wedge \neg Q) \vee R) \quad \checkmark$$

$$P \vee R \quad \checkmark$$

$$\neg Q \vee R \quad \checkmark$$



Notera att när en gren har blivit motsägelsefull så finns ingen anledning att fortsätta på den, och att när en formel "bockas av" med '✓' så måste motsvarande regel tillämpas på varje motsägelsefull gren under

⑧

denna formel. I exemplet ovan så  
blev alla grenar till sist motsägelsefulla,  
vilket innebär att ingen sanningsvärdes-  
tilldelning existerar som gör  $T$  sann.  
Därmed är  $T$  inte satisfierbar,  
vilket i sin tur innebär att  $\neg T$  är en  
tautologi.

Låt oss kalla ett semantiskt träd för  
avslutat om varje sammansatt formel  
i trädet som inte är en literal är <sup>(och inte befinner sig på</sup> en redan motsägelsefull <sup>gren</sup>  
markerad med '✓' (dvs. nedbruten).

Ett semantiskt träd där formeln  $S$   
forekommer överst (i "roten") kallas  
för ett semantiskt träd för  $S$ .

Det som har illustrerats med exempel kan  
nu sammanfattas på följande sätt:



Sats 1 Om  $S$  är en satslogisk

formel och  $T$  ett avslutat semantiskt träd för  $S$  så gäller att

$S$  är satisfierbar om och endast om  $T$  har minst en motsägelsefri gren.

Eftersom  $S$  är en tautologi om och endast om  $\neg S$  inte är satisfierbar så gäller även följande:

Sats 2 Om  $S$  är en satslogisk formel och  $T$  ett avslutat semantiskt träd för  $\neg S$  så gäller att

$S$  är en tautologi om och endast om  $T$  saknar motsägelsetria grenar (dvs. alla grenar är motsägelsefulla).

Övning Avgör om

$$\neg A \wedge (B \vee C) \wedge (\neg C \vee \neg D) \wedge (A \vee D) \wedge (\neg B \vee \neg D)$$

är satisfierbar genom att använda ett semantiskt träd.

Övning Vilka nya nedbrytningsregler bör införas om vi skall kunna avgöra satisfierbarhet, med hjälp av semantiska träd, för formler som också innehåller ' $\rightarrow$ ' och/eller ' $\leftrightarrow$ '?

Ledning: Tänk på ekvivalenserna

$$(A \rightarrow B) \stackrel{\text{taut}}{\iff} \neg A \vee B$$

$$(A \leftrightarrow B) \stackrel{\text{taut}}{\iff} (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\neg(A \rightarrow B) \stackrel{\text{taut}}{\iff} A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \leftrightarrow B) \stackrel{\text{taut}}{\iff} (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

En av reglerna kan således vara

