UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Vera Koponen

PROV I MATEMATIK
Logik och bevisteknik I
2008-06-02

Skrivtid: 8-13. Tillåtna hjälpmedel: Inga, annat än pennor, radergum och papper (det sista tillhandahålles).
Poängsättning: Denna tentamen består av nio uppgifter och varje uppgift ger maximalt fem poäng.
Betygsgränser: För betyg 3 är det tillräckligt att man får minst fyra poäng på var och en av uppgifterna 1, 2, 3, 4 och 5. Om något av kraven för betyg 3 har uppnåtts (inklusive muntlig examination) och man fått minst 7, respektive 14, poäng sammanlagt på uppgifterna 6-9 så ges betyget 4, respektive 5.
Anmärkningar: Lösningarna skall innehålla relevanta förklaringar. Om man blivit, eller blir, godkänd på löpande examination med LPL-uppgifter så behöver man inte göra uppgifterna 1-5 nedan.

1. Översätt följande utsagor till första ordningens logik (FOL), med hjälp av predikatsymbolerna 'Klocka', 'I-butiken', 'Större-än' och 'Lika-stora', med lämplig ställighet:
(a) Det finns en klocka i butiken som är större än en annan klocka i butiken.
(b) Alla klockor i butiken är inte lika stora.
(c) Det finns en klocka i butiken som är större än alla andra klockor i butiken.

2. Är någon av följande satser en tautolog konsekvens av någon annan av dem. Ange i så fall vilken sats som är en tautolog konsekvens av en annan sats, för varje sådant fall; och motivera varför detta inte gäller i de övriga fallen.

$$\begin{aligned} A &: \neg(Q \vee R) \vee (P \leftrightarrow \neg Q) \\ B &: \neg(P \wedge \neg Q) \rightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \wedge R) \\ C &: (P \vee Q \vee R) \rightarrow \neg((P \wedge R) \rightarrow Q) \end{aligned}$$

3. Ange en formel på disjunktiv normalform (DNF) som är tautologiskt ekvivalent med C i uppgift 2.

4. För var och en av följande slutledningar, ange ett formellt bevis av dess slutsats från de givna premisserna om den är valid, eller förklara varför slutledningen inte är valid.

$$\begin{array}{|l} A \leftrightarrow (B \rightarrow \neg C) \\ \neg C \\ \hline A \rightarrow B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{|l} A \rightarrow (B \leftrightarrow \neg C) \\ C \\ \hline A \rightarrow \neg B \end{array}$$

5. För var och en av följande slutledningar, ange ett formellt bevis av dess slutsats från de givna premisserna om den är valid, eller förklara med hjälp av en lämplig modell (s.k. motexempel) varför slutledningen inte är valid.

$$\begin{array}{|l} \forall x(\ A(x) \vee \neg B(x)\ ) \\ \exists x B(x) \\ \hline \exists x A(x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{|l} \forall x(\ A(x) \vee \neg B(x)\ ) \\ \exists x B(x) \\ \hline \neg \forall x A(x) \end{array}$$

(Fortsätter på nästa sida)

Låt P vara en 1-ställig predikatsymbol och R en 2-ställig predikatsymbol. Nedan anges 6 satser. Var och en av uppgifterna 6-9 gör ett påstående om formell bevisbarhet. Om påståendet är korrekt, dvs. om ett formellt bevis av det påstådda slaget existerar så ange ett sådant. Om påståendet är felaktigt så förklara varför genom att beskriva en lämplig modell (vars universum och tolkningar av relationssymboler skall anges formellt, som en mängd och som relationer på denna mängd) och eventuellt använda sundhets- eller fullständighetssatsen.

$$\begin{aligned}
A &: \quad \forall x(\ P(x) \ \rightarrow\ \exists y R(x,y)\ ) \\
B &: \quad \forall x \forall y(\ R(x,y) \ \rightarrow\ (P(x) \ \wedge\ \neg P(y))\ ) \\
C &: \quad \exists x P(x) \\
D &: \quad \exists x \neg P(x) \\
E &: \quad \forall x \exists y R(x,y) \\
F &: \quad \exists x \forall y R(x,y)
\end{aligned}$$

6. $A, C \vdash E$.

7. $F \vdash \neg B$.

8. $B, F \vdash E$.

9. $A, B, C \vdash D$.

Lycka till!