Vera Koponen

Lösningsförslag för Logik och bevisteknik I, 2008-06-02

1 (a) $\exists x \exists y (\text{Klocka}(x) \wedge \text{I-butiken}(x)$
$\wedge \text{Klocka}(y) \wedge \text{I-butiken}(y)$
$\wedge \text{Större-än}(x, y))$

(b) $\neg \forall x \forall y ((\text{Klocka}(x) \wedge \text{I-butiken}(x)$
$\wedge \text{Klocka}(y) \wedge \text{I-butiken}(y))$
$\rightarrow \text{Lika-stora}(x, y))$

(c) $\exists x (\text{Klocka}(x) \wedge \text{I-butiken}(x)$
$\wedge \forall y ((\text{Klocka}(y) \wedge \text{I-butiken}(y))$
$\rightarrow \text{Större-än}(x, y)))$

2. Genom att studera sanningsvärdestabellerna för A, B och C så ser man att

A är en tautologisk konseku. av B och A är en tautologisk konseku. av C.

Men det finns en sanningsvärdestilldeln. som gör B sann och C falsk, och en som gör C sann och B falsk, så C är inte en tautologisk konseku. av B, och ej heller det omvända. (Era lösningar bör inkludera sanningsvärdestabellerna.)

3. $C: \; (P \vee Q \vee R) \rightarrow \neg((P \wedge R) \rightarrow Q)$

$$\overset{taut}{\Longleftrightarrow} \neg(P \vee Q \vee R) \vee \neg(\neg(P \wedge R) \vee Q)$$

$$\overset{taut}{\Longleftrightarrow} (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee ((P \wedge R) \wedge \neg Q)$$

$$\overset{taut}{\Longleftrightarrow} (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge R \wedge \neg Q)$$

där den sista formeln är på DNF och tautologiskt ekvivalent med C.

4. Den högra slutledningen är valid och här är ett bevis:

1	$A \rightarrow (B \leftrightarrow \neg C)$	
2	C	
3	$\quad A$	
4	$\quad B \leftrightarrow \neg C$	1, 2, $\rightarrow$ Elim
5	$\quad\quad B$	
6	$\quad\quad \neg C$	4, 5 $\leftrightarrow$ Elim
7	$\quad\quad \perp$	2, 6, $\perp$ Intro
8	$\quad \neg B$	
9	$A \rightarrow \neg B$	3-8, $\rightarrow$ Intro

Den vänstra slutledningen är inte valid, för om

A: sann, B: falsk och C: falsk

så är premisserna sanna men slutsatsen falsk.

5. Den vänstra slutledningen är valid och här är ett bevis:

1	$\forall x(A(x) \lor \neg B(x))$	
2	$\exists x B(x)$	
3	$\boxed{c}\ B(c)$	
4	$A(c) \lor \neg B(c)$	1, $\forall$Elim
5	$A(c)$	
6	$A(c)$	5, Reit
7	$\neg B(c)$	
8	$\perp$	3, 7, $\perp$Intro
9	$A(c)$	8, $\perp$Elim
10	$A(c)$	4, 5–6, 7–9, $\lor$Elim
11	$\exists x A(x)$	10, $\exists$Intro
12	$\exists x A(x)$	2, 3–11, $\exists$Elim

Den högra slutsatsen är inte valid, för om M är en värld där alla element har egenskapen A och minst ett element har egenskapen B så är premisserna sanna i M, men slutsatsen är falsk i M.

Kom ihåg att:

$A: \forall x\,(P(x) \to \exists y\, R(x,y))$

$B: \forall x \forall y\,(R(x,y) \to (P(x) \land \neg P(y)))$

$C: \exists x\, P(x)$

$D: \exists x\, \neg P(x)$

$E: \forall x \exists y\, R(x,y)$

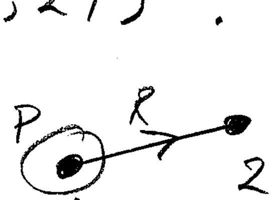
$F: \exists x \forall y\, R(x,y)$

6. $A, C \vdash E$ stämmer __inte__.

Låt $\mathcal{M}$ vara modellen med universum $\{1,2\}$ där

$$P^{\mathcal{M}} = \{1\} \text{ och}$$

$$R^{\mathcal{M}} = \{(1,2)\}.$$

Med figur: 

Då är A och C sanna i $\mathcal{M}$, men E är falsk i $\mathcal{M}$, så $A, C \overset{FS}{\not\models} E$ och enligt sundhetssatsen så $A, C \nvdash E$.

7. $F \vdash \neg B$ stämmer och ett bevis kan se ut så här:

1	$\exists x \forall y R(x,y)$	
2	$\forall x \forall y (R(x,y) \to (P(x) \land \neg P(y)))$	
3	$\boxed{c}\ \forall y R(c,y)$	
4	$R(c,c)$	3, $\forall$Elim
5	$\forall y (R(c,y) \to (P(c) \land \neg P(y)))$	2, $\forall$Elim
6	$R(c,c) \to (P(c) \land \neg P(c))$	5, $\forall$Elim
7	$P(c) \land \neg P(c)$	4, 6, $\to$Elim
8	$P(c)$	7, $\land$Elim
9	$\neg P(c)$	7, $\land$Elim
10	$\bot$	8, 9, $\bot$Intro
11	$\bot$	1, 3-10, $\exists$Elim
12	$\neg \forall x \forall y (R(x,y) \to (P(x) \land \neg P(y)))$	2-11, $\neg$Intro

8. $B, F \vdash E$ stämmer.

Lösningen till uppgift 7 anger ett formellt bevis med premissen F och slutsatsen $\neg B$. Kalla detta bevis för Π.

Nu får vi ett formellt bevis med premisserna B, F och slutsatsen E på följande sätt:

1	B	
2	F	
	Π	rader 3-14
	$\neg B$	
15	$\bot$	1, 14, $\bot$ Intro
	E	15, $\bot$ Elim

Men beviset är ointressant på så sätt att premisserna B, F aldrig kan vara sanna samtidigt, eftersom $F \overset{FO}{\Rightarrow} \neg B$, vilket följer från lösn. till uppg. 7 och sundhetssatsen.

9. $A, B, C \vdash D$ stämmer och ett formellt bevis kan se ut så här:

1	$\forall x\,(P(x) \to \exists y R(x,y))$	
2	$\forall x \forall y\,(R(x,y) \to (P(x) \land \neg P(y)))$	
3	$\exists x P(x)$	
4	$\boxed{c}$ $P(c)$	
5	$P(c) \to \exists y R(c,y)$	1, $\forall$Elim
6	$\exists y R(c,y)$	4, 5, $\to$Elim
7	$\boxed{d}$ $R(c,d)$	
8	$\forall y\,(R(c,y) \to (P(c) \land \neg P(y)))$	2, $\forall$Elim
9	$R(c,d) \to (P(c) \land \neg P(d))$	8, $\forall$Elim
10	$P(c) \land \neg P(d)$	7, 9, $\to$Elim
11	$\neg P(d)$	10, $\land$Elim
12	$\exists x \neg P(x)$	11, $\exists$Intro
13	$\exists x \neg P(x)$	6, 7–12, $\exists$Elim
14	$\exists x \neg P(x)$	3, 4–13, $\exists$Elim