UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Vera Koponen

PROV I MATEMATIK
Logik och bevisteknik I
2008-08-22

Skrivtid: 8-13. Tillåtna hjälpmedel: Inga, annat än pennor, radergum och papper (det sista tillhandahålles).
Poängsättning: Denna tentamen består av nio uppgifter och varje uppgift ger maximalt fem poäng.
Betygsgränser: För betyg 3 är det tillräckligt att man får minst fyra poäng på var och en av uppgifterna 1, 2, 3, 4 och 5 samt blir, eller har blivit, godkänd på muntlig examination. Om något av kraven för betyg 3 har uppnåtts (inklusive muntlig examination) och man fått minst 7, respektive 14, poäng sammanlagt på uppgifterna 6-9 så ges betyget 4, respektive 5.
Anmärkningar: Lösningarna skall innehålla relevanta förklaringar. Om man blivit godkänd på löpande examination med LPL-uppgifter så behöver man inte göra uppgifterna 1-5 nedan.

1. Översätt följande utsagor till första ordningens logik (FOL), med hjälp av predikatsymbolerna Tal, Större, Udda, Primtal och konstantsymbolen 2:
(a) För varje tal finns ett tal som är större.
(b) Det finns ett tal som är större än alla andra tal.
(c) Varje primtal som är större än 2 är udda.

2. Svara på följande frågor och motivera svaren. Är någon av följande satser en tautolog konsekvens av en annan sats. Är någon av följande satser tautologt ekvivalent med en annan sats. Ange i så fall vilka satser det rör sig om, för varje sådant fall; och motivera varför detta inte gäller i de övriga fallen.

$$\begin{aligned} A &: \neg(P \wedge \neg(R \rightarrow Q)) \rightarrow (Q \wedge \neg R) \\ B &: (R \wedge \neg(P \rightarrow Q)) \vee \neg(Q \rightarrow R) \\ C &: \neg(P \wedge Q \wedge R) \rightarrow \neg(Q \leftrightarrow R) \end{aligned}$$

3. Ange en formel på disjunktiv normalform (DNF) som är tautologiskt ekvivalent med C i uppgift 2.

4. För var och en av följande slutledningar, ange ett formellt bevis av dess slutsats från de givna premisserna om den är valid, eller förklara varför slutledningen inte är valid.

Slutledning 1. premisser: $A \rightarrow (B \vee C)$, $\neg B$ slutsats: $A \rightarrow C$
Slutledning 2. premisser: $(A \wedge B) \rightarrow C$, $\neg B$ slutsats: $A \rightarrow C$

5. För var och en av följande slutledningar, ange ett formellt bevis av dess slutsats från de givna premisserna om den är valid, eller förklara med hjälp av en lämplig modell (s.k. motexempel) varför slutledningen inte är valid.

Slutledning 1. premisser: $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$, $\forall x B(x)$ slutsats: $\forall x A(x)$
Slutledning 2. premisser: $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$, $\neg\exists x B(x)$ slutsats: $\neg\exists x A(x)$

(Fortsätter på nästa sida)

Låt R vara en 2-ställig predikatsymbol. Nedan anges 6 satser. Var och en av uppgifterna 6-9 gör ett påstående om formell bevisbarhet. Om påståendet är korrekt, dvs. om ett formellt bevis av det påstådda slaget existerar så ange ett sådant. Om påståendet är felaktigt så förklara varför genom att beskriva en lämplig modell (vars universum och tolkning av R skall anges formellt, som en mängd samt en 2-ställig relation på denna mängd) och eventuellt använda sundhets- eller fullständighetssatsen.

$$
\begin{aligned}
A &: \forall x \forall y \forall z(\ (\ R(x,y) \land R(y,z) \ ) \to R(x,z) \ ) \\
B &: \forall x \exists y R(x,y) \\
C &: \exists x \forall y R(y,x) \\
D &: \exists x \exists y \exists z(\ R(x,y) \land R(y,z) \land R(z,x) \ ) \\
E &: \forall x \forall y(\ R(x,y) \to \exists z(\ R(x,z) \land R(z,y) \ ) \ ) \\
F &: \exists x R(x,x)
\end{aligned}
$$

6. $A, E, \neg F \vdash C$.

7. $A, E, \neg F \vdash \neg C$.

8. $A, B, \neg F \vdash \neg C$.

9. $A, D \vdash F$.

Lycka till!

Vera Koponen

Lösningar, eller ledningar, till Logik och bevisteknik I, 2008-08-22

1\. (a) $\forall x(Tal(x) \to \exists y(Tal(y) \wedge Större(y, x)))$

Här tolkar jag Större(y, x) som "y är större än x".

(b) $\exists x(Tal(x) \wedge \forall y(Tal(y) \to Större(x, y)))$

(c) $\forall x((Primtal(x) \wedge Större(x, 2)) \to Udda(x))$.

2\. Med hjälp av sanningsvärdestabell så ser man att A och B är tautologiskt ekvivalenta. Däremot är C inte tautologiskt ekvivalent med någon av A eller B. Detta eftersom exempelvis

②

Följande sanningsvärdestilldelning gör C sann, men A och B falska:

P : falsk   Q : falsk,   R : sann

3. $\neg(P \wedge Q \wedge R) \rightarrow \neg(Q \leftrightarrow R)$

$\overset{\text{taut}}{\Longleftrightarrow} (P \wedge Q \wedge R) \vee \neg(Q \leftrightarrow R)$

$\overset{\text{taut}}{\Longleftrightarrow} (P \wedge Q \wedge R) \vee \neg((Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow Q))$

$\overset{\text{taut}}{\Longleftrightarrow} (P \wedge Q \wedge R) \vee \neg(Q \rightarrow R) \vee \neg(R \rightarrow Q)$

$\overset{\text{taut}}{\Longleftrightarrow} (P \wedge Q \wedge R) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg Q)$,

där den sista satsen är på DNF.

4, Den första slutledningen är valid och ett formellt bevis ges av:

3

1	$A \to (B \vee C)$	
2	$\neg B$	
3	A	
4	$B \vee C$	1, 2, $\to$ Elim
5	B	
6	$\perp$	2, 5, $\perp$ Intro
7	C	6, $\perp$ Elim
8	C	
9	C	8, ReIt
10	C	4, 5-9, $\vee$ Elim
11	$A \to C$	3-10, $\to$ Intro

Den andra slutledningen är inte valid, eftersom premisserna blir sanna, men slutsatsen falsk, om

A: sann, B: falsk, C: falsk.

5. Den första slutledningen är inte valid, för om M är en värld/modell där alla objekten har egenskapen B, men minst ett objekt <u>inte</u> har egenskapen A, så blir premisserna sanna men slutsatsen falsk.

Den andra slutledningen är valid.

1	$\forall x(A(x) \to B(x))$	
2	$\neg \exists x B(x)$	
3	$\exists x A(x)$	
4	$\boxed{c}\ A(c)$	
5	$A(c) \to B(c)$	1, $\forall$Elim
6	$B(c)$	
7	$\exists x B(x)$	6, $\exists$Intro
8	$\exists x B(x)$	3-7, $\exists$Elim
9	$\bot$	2, 8, $\bot$Intro
10	$\neg \exists x A(x)$	3-9, $\neg$Intro

Kom ihåg att

$A: \forall x \forall y \forall z(((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z))$

$B: \forall x \exists y R(x,y)$

$C: \exists x \forall y R(y,x)$

$D: \exists x \exists y \exists z(R(x,y) \wedge R(y,z) \wedge R(z,x))$

$E: \forall x \forall y (R(x,y) \to \exists z (R(x,z) \wedge R(z,y)))$

$F: \exists x R(x,x)$.

6. $A, E, \neg F \vdash C$ stämmer inte.

Betrakta följande modell $\mathcal{M}$.

Dess universum är

$(0,1) = \{a \in \mathbb{R} : 0 < a < 1\}$

där $\mathbb{R}$ = mängden av reella tal.

Och $R^{\mathcal{M}} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}$ och $a < b\}$.

Så $R(a,b) \iff a < b$.

Då är A, E och $\neg F$ sanna i $\mathcal{M}$ och C är falsk i $\mathcal{M}$, eftersom $(0,1)$ inte har något största element.

Så $A, E, \neg F \overset{FO}{\not\Rightarrow} C$ och från sundhetssatsen följer att

$$A, E, \neg F \nvdash C.$$

7. $A, E, \neg F \vdash \neg C$ stämmer <u>inte</u> heller. Som motexempel definierar vi $\mathcal{M}$ som i föregående uppgift <u>förutom</u> att universumet i detta fall är $[0,1] = \{a \in \mathbb{R} : 0 \leq a \leq 1\}$.

Då är, som tidigare, A, E och $\neg F$ sanna i $\mathcal{M}$, men eftersom 1 är det största elementet i $\mathcal{M}$

så blir $\neg C$ falsk i $\mathcal{M}$.

Så $A, E, \neg F \not\stackrel{Fö}{\Rightarrow} \neg C$,

och sundhetssatsen medför då

att $A, E, \neg F \nvdash \neg C$.

(Lösningarna till 6 och 7 visar

att varken C eller $\neg C$ kan

bevisas från premisserna $A, E, \neg F$.)

fortsätter

8

8. $A, B, \neg F \vdash \neg C$ stämmer.

1	A	
2	B	
3	$\neg F$	
4	$\quad C$	
5	$\quad\quad \boxed{a}\ \forall y R(y, a)$	
6	$\quad\quad R(a, a)$	5, $\forall$Elim
7	$\quad\quad \exists x R(x, x)$	6, $\exists$Intro
8	$\quad \exists x R(x, x)$	4 – 7, $\exists$Elim
9	$\quad \perp$	3, 8, $\perp$Intro
10	$\neg C$	4 – 9, $\neg$Intro

9. A, D + F stämmer.

1	A	
2	D	
3	$\boxed{a}\ \exists y \exists z(R(a,y) \land R(y,z) \land R(z,a))$	
4	$\boxed{b}\ \exists z(R(a,b) \land R(b,z) \land R(z,a))$	
5	$\boxed{c}\ R(a,b) \land R(b,c) \land R(c,a)$	
6	$R(a,b) \land R(b,c)$	5, $\land$Elim
7	$(R(a,b) \land R(b,c)) \to R(a,c)$	1, $\forall$Elim tre gånger
8	$R(a,c)$	6, 7, $\to$Elim
9	$R(c,a)$	5, $\land$Elim
10	$R(a,c) \land R(c,a)$	8, 9, $\land$Intro
11	$(R(a,c) \land R(c,a)) \to R(a,a)$	1, $\forall$Elim tre gånger
12	$R(a,a)$	10, 11, $\to$Elim
13	$\exists x R(x,x)$	12, $\exists$Intro
14	$\exists x R(x,x)$	4-13, $\exists$Elim
15	$\exists x R(x,x)$	3-14, $\exists$Elim
16	$\underbrace{\exists x R(x,x)}_{F}$	2-15, $\exists$Elim