Logik och bevisteknik, 2009-06-03

Lösningsförslag

1. a) $\forall x((Delfin(x) \wedge I\_bassängen(x)) \rightarrow (Blå(x) \vee Grå(x)))$

b) $\forall x((Delfin(x) \wedge I\_bassängen(x)) \rightarrow \exists y\, Unge\text{-}Till(y, x))$

c) $\exists x((Delfin(x) \wedge I\_bassängen(x)) \rightarrow \forall y \neg Unge\_Till(y, x))$

2. A och B är inte tautologiskt ekvivalenta för under sanningsvärdestilldelningen

P: sann, Q: sann, R: falsk

så blir A falsk och B sann.

Genom att skriva ut en sanningsvärdetabell för A och C så ser man att de är tautologiskt ekvivalenta. Det följer att B och C inte är tautologiskt ekvivalenta.

3. $((P \land \neg Q) \lor \neg R) \to \neg(\neg P \lor Q)$

$\overset{taut}{\Longleftrightarrow} \neg((P \land \neg Q) \lor \neg R) \lor \neg(\neg P \lor Q)$

$\overset{taut}{\Longleftrightarrow} (\neg(P \land \neg Q) \land R) \lor (P \land \neg Q)$

$\overset{taut}{\Longleftrightarrow} ((\neg P \lor Q) \land R) \lor (P \land \neg Q)$

$\overset{taut}{\Longleftrightarrow} (\neg P \land R) \lor (Q \land R) \lor (P \land \neg Q)$

där den sista satsen är på DNF.

4. Man kan lätt kontrollera med sanningsvärdestabell (exempelvis) att slutledn.

$$\begin{array}{|l} P \vee (Q \leftrightarrow P) \\ \neg P \\ \hline \neg Q \end{array}$$

är valid. Ett formellt bevis:

1	$P \vee (Q \leftrightarrow P)$	
2	$\neg P$	
3	P	
4	$\bot$	2, 3, $\bot$ Intro
5	$\neg Q$	4, $\bot$ Elim
6	$Q \leftrightarrow P$	
7	Q	
8	P	6, 7, $\leftrightarrow$ Elim
9	$\bot$	2, 8, $\bot$ Intro
10	$\neg Q$	7–9, $\neg$ Intro
11	$\neg Q$	1, 3–5, 6–10, $\vee$ Elim

Slutledningen

	$(P \vee Q) \leftrightarrow P$
	$\neg Q$
	P

är inte valid, för om både P och Q är falska så blir premisserna sanna men slutsatsen falsk.

5. Den första slutledningen är valid, och här är ett formellt bevis:

1	$\forall x\,(Blå(x) \rightarrow \neg Röd(x))$	
2	$\exists x\, Röd(x)$	
3	$\quad \forall x\, Blå(x)$	
4	$\quad\quad \boxed{c}\ Röd(c)$	
5	$\quad\quad Blå(c)$	3, $\forall$ Elim
6	$\quad\quad Blå(c) \rightarrow \neg Röd(c)$	1, $\forall$ Elim
7	$\quad\quad \neg Röd(c)$	5, 6, $\rightarrow$ Elim
8	$\quad\quad \bot$	4, 7, $\bot$ Intro
9	$\quad \bot$	2, 4-8, $\exists$ Elim
10	$\neg \forall x\, Blå(x)$	

5

Den andra slutledningen är inte valid.

Motivation: Låt $\mathcal{M}$ vara en värld/modell där inga element är blå och där minst ett element är rött. Då är $\exists x\, Röd(x)$ sann i $\mathcal{M}$. Och eftersom varje element gör $Blå(x)$ falsk, och därmed $Blå(x) \rightarrow \neg Röd(x)$ sann, så är $\forall x\,(Blå(x) \rightarrow \neg Röd(x))$ sann i $\mathcal{M}$.

Men slutsatsen $\exists x\, Blå(x)$ är falsk i $\mathcal{M}$.

6. Vi anger en model $\mathcal{M}$ där A och B är sanna, men $\neg C$ falsk, så $A, B \not\Rightarrow_{FO} \neg C$ och sundhetssatsen medför då att $A, B \nvdash \neg C$.

Låt $\mathcal{M}$:s universum vara $\{a, b\}$ och tolka P, Q, R så här:

$$P^{\mathcal{M}} = \{a\}$$
$$Q^{\mathcal{M}} = \{b\}$$
$$R^{\mathcal{M}} = \{(a, b)\}$$

Då är A, B och C sanna i $\mathcal{M}$ så $A, B \not\Rightarrow_{FO} \neg C$.

7. Det stämmer att A, B ⊢ ¬D vilket bekräftas av följande bevis:

1	$\forall x \forall y ((P(x) \land Q(y)) \to \neg x = y)$	
2	$\forall x \forall y (R(x,y) \to (P(x) \land Q(y)))$	
3	$\exists x \forall y R(x,y)$	
4	$\boxed{c}\ \forall y R(c,y)$	
5	$R(c,c)$	4, ∀Elim
6	$\forall y (R(c,y) \to (P(c) \land Q(y)))$	2, ∀Elim
7	$R(c,c) \to (P(c) \land Q(c))$	6, ∀Elim
8	$P(c) \land Q(c)$	5, 7, →Elim
9	$\forall y ((P(c) \land Q(y)) \to \neg c = y)$	1, ∀Elim
10	$(P(c) \land Q(c)) \to \neg c = c$	9, ∀Elim
11	$\neg c = c$	8, 10, →Elim
12	$c = c$	= Intro
13	$\bot$	11, 12, ⊥Intro
14	$\bot$	3, 4–13, ∃Elim
15	$\neg \exists x \forall y R(x,y)$	3–14, ¬Intro

8. Det stämmer att A, F $\vdash$ E vilket bekräftas av följande bevis:

1	$\forall x \forall y ((P(x) \land Q(y)) \rightarrow \neg x = y)$	
2	$\exists x\, Q(x)$	
3	$\boxed{c}\ Q(c)$	
4	$P(c)$	
5	$P(c) \land Q(c)$	3, 4, $\land$Intro
6	$\forall y ((P(c) \land Q(y)) \rightarrow \neg c = y)$	1, $\forall$Elim
7	$(P(c) \land Q(c)) \rightarrow \neg c = c$	6, $\forall$Elim
8	$\neg c = c$	5, 7, $\rightarrow$Elim
9	$c = c$	$=$Intro
10	$\perp$	8, 9, $\perp$Intro
11	$\neg P(c)$	4-10, $\neg$Intro
12	$\exists x \neg P(x)$	11, $\exists$Intro
13	$\exists x \neg P(x)$	2, 3-12, $\exists$Elim.

9. Det stämmer inte att $A, \neg E \vdash B$, pga sundhetssatsen och faktumet att $A, \neg E \not\models_{Fo} B$, vilket visas av följande modell $\mathcal{N}$, där A och $\neg E$ är sanna, men inte B.

Låt $\mathcal{N}$:s universum vara $\{a, b\}$, och tolka P, Q, R så här:

$$P^{\mathcal{N}} = \{a, b\}$$

$$Q^{\mathcal{N}} = \emptyset$$

$$R^{\mathcal{N}} = \{(a, b)\}$$

Eftersom $P(x) \wedge Q(y)$ är falsk för alla element i $\mathcal{N}$ (pga. $Q^{\mathcal{N}} = \emptyset$) så är A sann i $\mathcal{N}$. Även $\neg E$ är sann i $\mathcal{N}$ (pga. $Q^{\mathcal{N}} = \emptyset$). Men $R(x, y) \rightarrow (P(x) \wedge Q(y))$ är falsk för $x = a$ och $y = b$ i $\mathcal{N}$, så B är falsk i $\mathcal{N}$.