UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Vera Koponen

PROV I MATEMATIK
Logik och bevisteknik I
2009-08-20

Skrivtid: 8-13. Tillåtna hjälpmedel: Inga, annat än pennor, radergum och papper (det sista tillhandahålles).
Poängsättning: Denna tentamen består av nio uppgifter och varje uppgift ger maximalt fem poäng.
Betygsgränser: För betyg 3 är det tillräckligt att man får minst fyra poäng på var och en av uppgifterna 1, 2, 3, 4 och 5 samt blir, eller har blivit, godkänd på muntlig examination. Om kravet för betyg 3 har uppnåtts (inklusive muntlig examination) och man har fått minst 7, respektive 14, poäng sammanlagt på uppgifterna 6-9 så ges betyget 4, respektive 5.
Anmärkningar: Lösningarna skall innehålla relevanta förklaringar.

1. Översätt följande utsagor till första ordningens logik (FOL), med hjälp av de 1-ställiga predikatsymbolerna Lingon, Blåbär, Skogen samt den 2-ställiga predikatsymbolen Sötare:
(a) Det finns minst ett lingon och minst ett blåbär i skogen.
(b) Varje blåbär är sötare än något lingon i skogen.
(c) Det finns ett blåbär i skogen som är sötare än varje lingon i skogen.

2. Svara på följande frågor och motivera svaren. Är någon av följande satser en tautologiskt konsekvens av en annan sats? Är någon av följande satser tautologiskt ekvivalent med en annan sats? Ange i så fall vilka satser det rör sig om, för varje sådant fall; och motivera varför detta inte gäller i de övriga fallen.

$$A: \quad (\neg P \vee \neg Q) \rightarrow R$$
$$B: \quad (\ P \ \rightarrow \ (Q \rightarrow R)\ ) \ \rightarrow \ \neg(\ R \ \rightarrow \ (Q \rightarrow P)\ )$$
$$C: \neg(\ Q \ \rightarrow \ (P \rightarrow R)\ ) \ \vee \ \neg(Q \ \rightarrow \ (R \rightarrow P)\ )$$

3. Ange en formel på disjunktiv normalform (DNF) som är tautologiskt ekvivalent med B i uppgift 2.

4. För var och en av följande slutledningar, ange ett formellt bevis av dess slutsats från de givna premisserna om den är valid, eller förklara varför slutledningen inte är valid.

Slutledning 1. premisser: $A \leftrightarrow (\neg B \vee C),\ C$ slutsats: $A \rightarrow B$
Slutledning 2. premisser: $A \leftrightarrow (B \vee \neg C),\ C$ slutsats: $A \rightarrow B$

5. För var och en av följande slutledningar, ange ett formellt bevis av dess slutsats från de givna premisserna om den är valid, eller förklara med hjälp av en lämplig modell (s.k. motexempel) varför slutledningen inte är valid.

Slutledning 1. premiss: $\forall x(\ A(x) \ \rightarrow \ B(x)\ )$ slutsats: $\neg\exists x(\ A(x) \ \wedge \ \neg B(x)\ )$
Slutledning 2. premiss: $\forall x(\ B(x) \ \rightarrow \ A(x)\ )$ slutsats: $\neg\exists x(\ A(x) \ \wedge \ \neg B(x)\ )$

(Fortsätter på nästa sida)

Låt P vara en 1-ställig predikatsymbol och R en 2-ställig predikatsymbol. Nedan anges 5 satser. Var och en av uppgifterna 6-9 gör ett påstående om formell bevisbarhet. Om påståendet är korrekt, dvs. om ett formellt bevis av det påstådda slaget existerar så ange ett sådant. Om påståendet är felaktigt så förklara varför genom att beskriva en lämplig modell (vars universum och tolkning av P och R skall anges formellt, som en mängd samt relationer på denna mängd) och eventuellt använda sundhets- eller fullständighetssatsen.

$$\begin{array}{ll}
A: & \forall x \forall y(\ R(x,y) \ \rightarrow\ \neg(P(x) \leftrightarrow P(y))\ ) \\
B: & \forall x \forall y(\ (\neg x = y \ \wedge\ \neg R(x,y)) \ \rightarrow\ \exists z(R(x,z) \wedge R(z,y))\ ) \\
C: & \forall x \forall y(\ (P(x) \wedge \neg P(y)) \ \rightarrow\ R(x,y)\ ) \\
D: & \exists x \exists y \exists z(\ R(x,y) \ \wedge\ R(y,z) \ \wedge\ R(z,x)\ ) \\
E: & \forall x \forall y(\ R(x,y) \ \rightarrow\ R(y,x)\ )
\end{array}$$

6. $A \vdash \neg D$.

7. $A, B \vdash C$.

8. $A, C \vdash B$.

9. $A, C, E \vdash B$.

Lycka till!