UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Vera Koponen

PROV I MATEMATIK
Logik och bevisteknik I
2010-05-28

Skrivtid: 14-19. Tillåtna hjälpmedel: Inga, annat än pennor, radergum och papper (det sista tillhandahålles).
Poängsättning: Denna tentamen består av nio uppgifter och varje uppgift ger maximalt fem poäng.
Betygsgränser: För betyg 3 är det tillräckligt att man får minst fyra poäng på var och en av uppgifterna 1, 2, 3, 4 och 5 samt blir godkänd på muntlig examination. (Den som har blivit godkänd på alla inlämningsuppgifterna, med programvaran LPL, behöver inte göra uppgifterna 1–5.) Om kravet för betyg 3 har uppnåtts (inklusive muntlig examination) och man fått minst 7, respektive 14, poäng sammanlagt på uppgifterna 6–9 så ges betyget 4, respektive 5.
Lösningarna skall innehålla relevanta förklaringar.

1. Översätt följande utsagor till första ordningens logik (FOL), med hjälp av (endast) relationssymbolerna Tal, Primtal, Jämnt, Större-än (alternativt $>$), $=$, och konstantsymbolen 2 (välj själv lämplig ställighet för var och en av relationssymbolerna):
(a) Om ett primtal är jämnt så är det lika med 2.
(b) Det finns inget största primtal.
(c) För varje udda tal så finns ett jämnt tal som är större.

2. Svara på följande frågor och motivera svaren. Är någon av följande satser en tautologisk konsekvens av någon annan sats? Är någon av följande satser tautologiskt ekvivalent med någon annan sats? Ange i så fall vilka satser det rör sig om, för varje sådant fall; och motivera varför detta inte gäller i de övriga fallen.

$$A : \neg P \;\rightarrow\; (Q \wedge R)$$
$$B : (P \rightarrow Q) \;\rightarrow\; (\; Q \;\wedge\; (P \vee R)\;)$$
$$C : (\neg P \;\vee\; \neg Q) \;\rightarrow\; (\; (\neg Q \;\vee\; \neg R) \;\rightarrow\; (P \wedge R)\;)$$

3. Ange en formel på disjunktiv normalform (DNF) som är tautologiskt ekvivalent med B i uppgift 2. (De tautologiska ekvivalenserna $D \wedge (E \vee F) \iff (D \wedge E) \vee (D \wedge F)$ och/eller $D \vee (E \wedge F) \iff (D \vee E) \wedge (D \vee F)$ kan eventuellt vara till hjälp.)

4. För var och en av följande slutledningar, ange ett formellt bevis av dess slutsats från de givna premisserna om den är valid, eller förklara varför slutledningen inte är valid.

Slutledning 1. premisser: $\neg A \rightarrow B,\; B \leftrightarrow \neg C,\; C$ slutsats: A
Slutledning 2. premisser: $A \rightarrow \neg B,\; B \leftrightarrow \neg C,\; C$ slutsats: $\neg A$

5. För var och en av följande slutledningar, ange ett formellt bevis av dess slutsats från de givna premisserna om den är valid, eller förklara med hjälp av ett lämpligt motexempel varför slutledningen inte är valid.

Slutledning 1. premiss: $\exists x(\; A(x) \;\wedge\; B(x)\;)$ slutsats: $\neg\forall x(\; A(x) \;\rightarrow\; \neg B(x)\;)$
Slutledning 2. premiss: $\forall x(\; A(x) \;\vee\; B(x)\;)$ slutsats: $\exists x(\; A(x) \;\wedge\; B(x)\;)$

(Fortsätter på nästa sida)

Låt R vara en 2-ställig relationssymbol. Nedan anges 6 satser. Var och en av uppgifterna 6-9 gör ett påstående om formell bevisbarhet. Om påståendet är korrekt, dvs. om ett formellt bevis av det påstådda slaget existerar så ange ett sådant. Om påståendet är felaktigt så förklara varför genom att beskriva en lämplig modell (vars universum och tolkning av R skall anges formellt, som en mängd samt en binär relation på denna) och eventuellt använda sundhets- eller fullständighetssatsen.

$$\begin{array}{ll}
A: & \forall x \forall y \forall z(\ (R(x,y)\ \wedge\ R(y,z))\ \rightarrow\ R(x,z)\ ) \\
B: & \forall x \forall y \exists z(\ R(x,z)\ \wedge\ R(y,z)\ ) \\
C: & \forall x \forall y \forall z \exists u(\ R(x,u)\ \wedge\ R(y,u)\ \wedge\ R(z,u)\ ) \\
D: & \exists x \forall y(\ \neg\ x = y\ \rightarrow\ R(y,x)\ ) \\
E: & \forall x \neg R(x,x) \\
F: & \neg \exists x \exists y(\ R(x,y)\ \wedge\ R(y,x)\ )
\end{array}$$

6. $A, B \vdash C$.

7. $A, B \vdash D$.

8. $A, B \vdash \neg D$.

9. $A, B, E, F \vdash \neg D$.

Lycka till!