Logik och bevisteknik 2010-05-28

Förslag på (i vissa fall ofullständiga) lösningar.

1 (a) $\forall x((Primtal(x) \wedge Jämnt(x)) \rightarrow x=2)$.

(b) $\neg\exists x(Primtal(x) \wedge$
$\forall y(Primtal(y) \rightarrow (x=y \vee Större\_än(x,y))))$.

(c) $\forall x(\neg Jämnt(x) \rightarrow$
$\exists y(Jämnt(y) \wedge Större\_än(y,x)))$.

2. Om man (exempelvis) skriver upp sanningsvärdestabellerna för A, B och C så finner man att

$A \overset{\text{taut}}{\Longleftrightarrow} B$ och $C \overset{\text{taut}}{\Longrightarrow} A$

(vilket nu medför $C \overset{\text{taut}}{\Longrightarrow} B$),

men $A \overset{\text{taut}}{\not\Longrightarrow} C$, vilket medför att

$B \overset{\text{taut}}{\not\Longrightarrow} C$. (Om P är sann och både Q och R falska, så blir A och B sanna, men C falsk.)

(2)

3. $B: (P \to Q) \to (Q \wedge (P \vee R)) \overset{\text{taut}}{\Longleftrightarrow}$

$\neg(P \to Q) \vee (Q \wedge (P \vee R)) \overset{\text{taut}}{\Longleftrightarrow}$

$(P \wedge \neg Q) \vee ((Q \wedge P) \vee (Q \wedge R)) \overset{\text{taut}}{\Longleftrightarrow}$

$(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \overset{\text{taut}}{\Longleftrightarrow}$

$P \vee (Q \wedge R)$ (en DNF).

(Även den näst-sista raden är en DNF, men lite krångligare.)

4. Slutledning 1 är valid och här är ett formellt bevis:

1	$\neg A \to B$	
2	$B \leftrightarrow \neg C$	
3	C	
4	$\quad \neg A$	
5	$\quad B$	$\to$ Elim, 1
6	$\quad \neg C$	$\to$ Elim, 2
7	$\quad \bot$	$\bot$ Intro, 3, 6
8	$\neg\neg A$	$\neg$ Intro, 4 - 7
9	A	$\neg$ Elim 8

Slutledning 2 är inte valid, för om A och C är sanna och B falsk, så blir premisserna sanna, men slutsatsen falsk.

5. Slutledning 1 är valid och här följer ett formellt bevis:

1	$\exists x(A(x) \land B(x))$	
2	$\forall x(A(x) \to \neg B(x))$	
3	$\boxed{c}$ $A(c) \land B(c)$	
4	$A(c) \to \neg B(c)$	$\forall$ Elim, 2
5	$A(c)$	$\land$ Elim, 3
6	$B(c)$	$\land$ Elim, 3
7	$\neg B(c)$	$\to$ Elim, 4, 5
8	$\perp$	$\perp$ Intro, 6, 7
9	$\perp$	$\exists$ Elim, 1, 3–8
10	$\neg\forall x(A(x) \to \neg B(x))$	$\neg$ Intro, 2–9

Slutledning 2 är inte valid, för i en värld där varje objekt har exakt en av egenskaperna A eller B (men inte båda egenskaperna) så blir premissen sann, men slutsatsen falsk.

(Man kan t.ex. låta alla objekt ha egenskapen A, och inget objekt egenskapen B.)

6. $A, B \vdash C$ stämmer.

$\forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z))$

$\forall x \forall y \exists z (R(x,z) \wedge R(y,z))$

$\boxed{a}$

$\boxed{b}$

$\boxed{c}$

$\forall y \exists z (R(a,z) \wedge R(y,z))$

$\exists z (R(a,z) \wedge R(b,z))$

$\boxed{d}$ $R(a,d) \wedge R(b,d)$

$\forall y \exists z (R(d,z) \wedge R(y,z))$

$\exists z (R(d,z) \wedge R(c,z))$

$\boxed{e}$ $R(d,e) \wedge R(c,e)$

$R(d,e)$

$R(a,d)$

$R(b,d)$

$R(a,d) \wedge R(d,e)$

$R(b,d) \wedge R(d,e)$

$\forall y \forall z ((R(a,y) \wedge R(y,z)) \to R(a,z))$

$\forall z ((R(a,d) \wedge R(d,z)) \to R(a,z))$

$(R(a,d) \wedge R(d,e)) \to R(a,e)$

$R(a,e)$

⋮

på liknande sätt

⋮

$R(b,e)$

$R(a,e) \wedge R(b,e)$

$R(c,e)$

$R(a,e) \wedge R(b,e) \wedge R(c,e)$

$\exists u (R(a,u) \wedge R(b,u) \wedge R(c,u))$

$\exists u (R(a,u) \wedge R(b,u) \wedge R(c,u))$

$\exists u (R(a,u) \wedge R(b,u) \wedge R(c,u))$

⋮

Övning att fylla i regler och radhänvisningar.

$\forall$ Intro, 3 gånger

$\vdots$

$\forall x \forall y \forall z \exists u (R(x,u) \wedge R(y,u) \wedge R(z,u))$

7. $A, B \vdash D$ stämmer <u>inte</u>.

Följande är (en) struktur i vilken A och B är sanna, men D falsk:

$$\mathcal{M}_1 = (M_1, R^{\mathcal{M}_1}) \text{ där}$$

$$M_1 = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}, \text{ och}$$

$$R^{\mathcal{M}_1} = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N} \text{ och } n < m\}.$$

8. $A, B \vdash \neg D$ stämmer <u>inte</u>.

Följande är en struktur i vilken A och B är sanna, men $\neg D$ falsk (dvs. D sann).

$$\mathcal{M}_2 = (M_2, R^{\mathcal{M}_2}) \text{ där}$$

$$M_2 = \{0\} \text{ och } R^{\mathcal{M}_2} = \{(0,0)\}.$$

9. A, B, E, F $\vdash$ ¬D stämmer.

$\forall x \forall y \forall z((R(x,y) \land R(y,z)) \to R(x,z))$
$\forall x \forall y \exists z(R(x,z) \land R(y,z))$
$\forall x \neg R(x,x)$
$\neg \exists x \exists y(R(x,y) \land R(y,x))$

$\exists x \forall y(\neg x = y \to R(y,x))$
$\boxed{a}$ $\forall y(\neg a = y \to R(y,a))$
$\forall y \exists z(R(a,z) \land R(y,z))$
$\exists z(R(a,z) \land R(a,z))$
$\boxed{b}$ $R(a,b) \land R(a,b)$
$R(a,b)$
$a = b$
$R(b,b)$
$\neg R(b,b)$
$\bot$
$\neg a = b$
$\neg a = b \to R(b,a)$
$R(b,a)$
$R(a,b) \land R(b,a)$
$\exists y(R(a,y) \land R(y,a))$
$\exists x \exists y(R(x,y) \land R(y,x))$
$\bot$
$\bot$
$\bot$
$\neg \exists x \forall y(\neg x = y \to R(y,x))$

Övning att fylla i bevisregler och radhänvisningar.