UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Vera Koponen

PROV I MATEMATIK
Logik och bevisteknik I
2010-08-23

Skrivtid: 8-13. Tillåtna hjälpmedel: Inga, annat än pennor, radergum och papper (det sista tillhandahålles).
Poängsättning: Denna tentamen består av nio uppgifter och varje uppgift ger maximalt fem poäng.
Betygsgränser: För betyg 3 är det tillräckligt att man får minst fyra poäng på var och en av uppgifterna 1, 2, 3, 4 och 5 samt blir godkänd på muntlig examination. (Den som har blivit godkänd på alla inlämningsuppgifterna, med programvaran LPL, behöver inte göra uppgifterna 1–5.) Om kravet för betyg 3 har uppnåtts (inklusive muntlig examination) och man har fått minst 7, respektive 14, poäng sammanlagt på uppgifterna 6–9 så ges betyget 4, respektive 5.
Lösningarna skall innehålla relevanta förklaringar.

1. Översätt följande utsagor till första ordningens logik (FOL), med hjälp av (endast) relationssymbolerna Storskogsbo, Dvärg, Alv, Mindre-än (välj själv lämplig ställighet för var och en av relationssymbolerna):
(a) Varenda Storskogsbo är dvärg eller alv.
(b) Ingen Storskogsbo är både dvärg och alv.
(c) Varje dvärg är mindre än någon alv.

2. Svara på följande frågor och motivera svaren. Är någon av följande satser en tautologisk konsekvens av någon annan sats? Är någon av följande satser tautologiskt ekvivalent med någon annan sats? Ange i så fall vilka satser det rör sig om, för varje sådant fall; och motivera varför detta inte gäller i de övriga fallen.

$$A : (R \to Q) \ \to \ (P \wedge Q)$$
$$B : (\ (P \wedge Q) \ \vee \ R\ ) \ \wedge \ (P \vee \neg Q)$$
$$C : (P \to \neg Q) \ \to \ (P \wedge R)$$

3. Ange en formel på konjunktiv normalform (KNF) som är tautologiskt ekvivalent med C i uppgift 2. (De tautologiska ekvivalenserna $D \wedge (E \vee F) \iff (D \wedge E) \vee (D \wedge F)$ och/eller $D \vee (E \wedge F) \iff (D \vee E) \wedge (D \vee F)$ kan eventuellt vara till hjälp.)

4. För var och en av följande slutledningar, ange ett formellt bevis av dess slutsats från de givna premisserna om den är giltig, eller förklara varför slutledningen inte är giltig.

Slutledning 1. premisser: $A \to (B \leftrightarrow \neg C),\ C$ slutsats: $A \to \neg B$
Slutledning 2. premisser: $A \leftrightarrow (B \to \neg C),\ \neg C$ slutsats: $A \to B$

5. För var och en av följande slutledningar, ange ett formellt bevis av dess slutsats från de givna premisserna om den är giltig, eller förklara med hjälp av ett lämpligt motexempel varför slutledningen inte är giltig.

Slutledning 1. premisser: $\forall x(\ P(x) \ \to \ \neg Q(x)\ ),\ \exists x Q(x)$ slutsats: $\exists x P(x)$
Slutledning 2. premisser: $\forall x(\ P(x) \ \to \ \neg Q(x)\ ),\ \exists x Q(x)$ slutsats: $\neg \forall x P(x)$

(Fortsätter på nästa sida)

Låt P vara en 1-ställig predikatsymbol och R en 2-ställig predikatsymbol. Nedan anges fem satser. Var och en av uppgifterna 6-9 gör ett påstående om formell bevisbarhet. Om påståendet är korrekt, dvs. om ett formellt bevis av det påstådda slaget existerar så ange ett sådant. Om påståendet är felaktigt så förklara varför genom att beskriva en lämplig modell (vars universum och tolkningar av relationssymboler skall anges formellt, som en mängd och som relationer på denna mängd) och eventuellt använda sundhets- eller fullständighetssatsen.

$$\begin{array}{ll}
A: & \forall x(\ P(x) \ \rightarrow \ \exists y R(x,y)\ ) \\
B: & \forall x \forall y(\ R(x,y) \ \rightarrow \ (P(x) \ \wedge \ \neg P(y))\ ) \\
C: & \exists x P(x) \\
D: & \forall x \forall y(\ R(x,y) \ \rightarrow \ R(y,x)\ ) \\
E: & \forall x \exists y R(x,y)
\end{array}$$

6. $A, C \vdash E$.

7. $A, C \vdash \neg E$.

8. $A, B, C \vdash \neg E$.

9. $A, B, C \vdash \neg D$.

Lycka till!