# Svar och i vissa fall lösningar till tentan i Logik och bevisteknik, 2010-08-23

1. (a) $\forall x(\text{Storskogsbo}(x) \to (\text{Dvärg}(x) \lor \text{Alv}(x)))$

(b) $\neg \exists x(\text{Storskogsbo}(x) \land \text{Dvärg}(x) \land \text{Alv}(x))$

(c) $\forall x(\text{Dvärg}(x) \to \exists y(\text{Alv}(y) \land \text{Mindre-än}(x,y)))$

2. A och B är tautologiskt ekvivalenta. Såväl A som B är tautologiska konsekvenser av C, men C är inte en tautologisk konsekvens av någon av de andra.

3. $(P \to \neg Q) \to (P \wedge R)$

$\overset{taut}{\iff} (\neg P \vee \neg Q) \to (P \wedge R)$

$\overset{taut}{\iff} \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \wedge R)$

$\overset{taut}{\iff} (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$\overset{taut}{\iff} ((P \wedge Q) \vee P) \wedge ((P \wedge Q) \vee R)$

$\overset{taut}{\iff} P \wedge ((P \vee R) \wedge (Q \vee R))$

$\overset{taut}{\iff} (P \wedge (Q \vee R)) \wedge (Q \vee R)$

$\overset{taut}{\iff} P \wedge (Q \vee R)$

Alla de tre nedersta formlerna är på KNF, men den längst ner är enklast.

4. Slutledning 1 är giltig, och ett formellt bevis kan se ut så här:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $A \rightarrow (B \leftrightarrow \neg C)$ | |
| 2 | $C$ | |
| 3 | $A$ | |
| 4 | $B \leftrightarrow \neg C$ | $\rightarrow$Elim, 1, 3 |
| 5 | $B$ | |
| 6 | $\neg C$ | $\leftrightarrow$ Elim, 4, 5 |
| 7 | $\perp$ | $\perp$ Intro, 2, 6 |
| 8 | $\neg B$ | $\neg$ Intro, 5 – 7 |
| 9 | $A \rightarrow \neg B$ | $\rightarrow$ Intro, 3 – 8 |

Slutledning 2 är <u>ogiltig</u> eftersom premisserna kan vara sanna samtidigt som slutsatsen är falsk.

<u>Övning</u> att finna en sådan sanningsvärdestilldelning till A, B, C.

5. Slutledning 1 är ogiltig, för i en värld där inget objekt har egenskapen P och minst ett objekt har egenskapen Q så kommer premisserna vara sanna, men inte slutsatsen.

Slutledning 2 är giltig och här är ett formellt bevis:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ | |
| 2 | $\exists x\, Q(x)$ | |
| 3 | $\quad \forall x\, P(x)$ | |
| 4 | $\quad\quad \boxed{c}\ Q(c)$ | |
| 5 | $\quad\quad P(c)$ | $\forall$ Elim, 3 |
| 6 | $\quad\quad P(c) \rightarrow \neg Q(c)$ | $\forall$ Elim, 1 |
| 7 | $\quad\quad \neg Q(c)$ | $\rightarrow$ Elim, 5, 6 |
| 8 | $\quad\quad \bot$ | $\bot$ Intro, 4, 7 |
| 9 | $\quad \bot$ | $\exists$ Elim, 2, 4-8 |
| 10 | $\neg \forall x\, P(x)$ | $\neg$ Intro, 3-9 |

---

Påståendena i uppg. 6, 7 stämmer inte.

Påståendena i uppg. 8, 9 stämmer.