Svar/lösningsförslag, 2011-03-10

1. $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, $\lim_{x\to\infty} \cos x$ existerar inte.

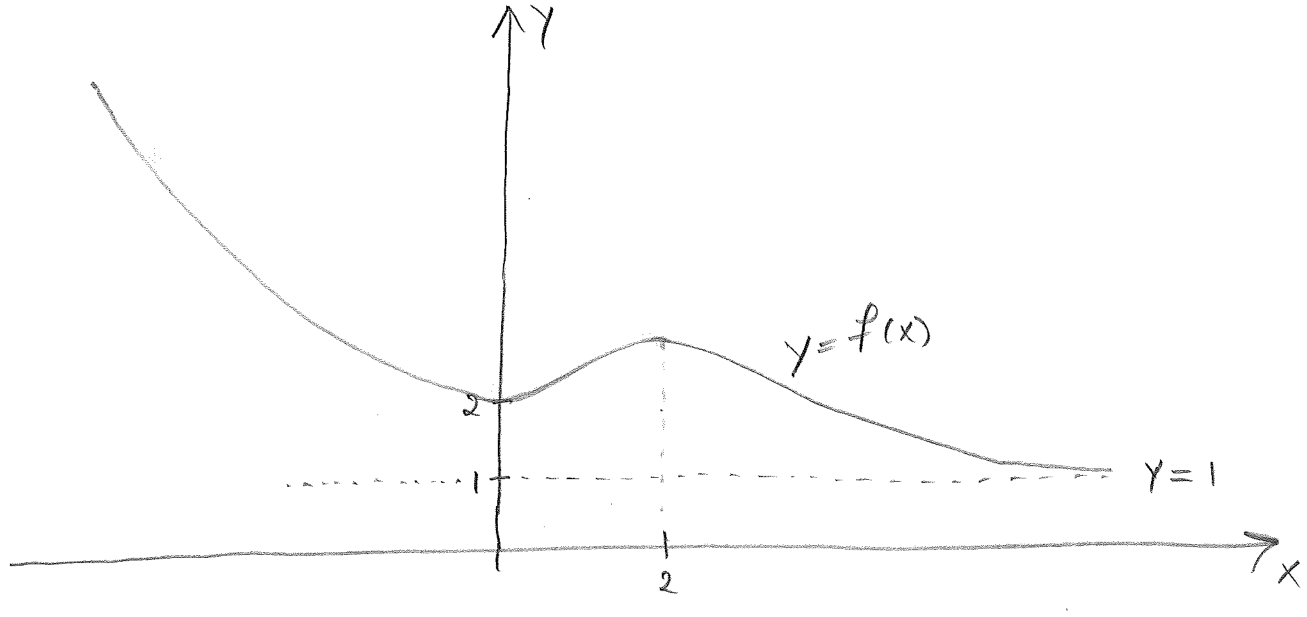
2. $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $g'(x) = (3x^2+2x-3)e^{3x}$.

3. Lutningen är $f'(2) = \dfrac{2\cdot 2}{2^2+1} = \dfrac{4}{5}$.

4. $f(x) = x^4$ är inverterbar på $[0,\infty)$ och på detta intervall är inversen $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{4}}$.
($f(x) = x^4$ är också inverterbar på $(-\infty, 0]$ och på detta intervall är inversen $f^{-1}(x) = -x^{\frac{1}{4}}$.)

5. $\ln x$, $10^6\sqrt{x}$, x, 2^{3x+1}.

6.



7. Taylor-polynomet av grad 2 för $\cos x$ kring punkten $x=0$, är $1-\frac{x^2}{2}$.

8. $$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$

(eller $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$).

9. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin(2x))\,dx = \left[x+\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\frac{\pi}{2}-1.$$

10. $$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^{a} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^a$$

$= \lim_{a\to\infty}(2\sqrt{a}-2) = \infty$, så integralen är <u>inte</u> konvergent.

11. Låt $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$, och lägg märke till att f ej är defin. i $x = 1$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 2x = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ eller } x = 2.$$

Teckentabell:

x		0		1		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	odef.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	odef.	$\searrow$	2	$\nearrow$

Från tabellen, där $\nearrow$ betyder 'växande' och '$\searrow$' avtagande, ser man att f aldrig antar värden i intervallet $(-2, 2)$.

Eftersom

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \boxed{\text{l'Hospitals regel}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x - 2}{1} = \infty$$

och $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \boxed{\text{l'Hospitals regel}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 2}{1} = -\infty$$

så följer, från tabellen och faktumet att f är kontinuerlig överallt utom i $x = 1$, att f antar alla värden i $(-\infty, -2]$ och alla värden i $[2, \infty)$, men inga andra värden.

12. Från ellipsernas ekvationer ser man att där de skär varandra så är x-koordinaten 0, men det kan också inses så här

$$(x+a)^2 + 4y^2 = 1 = (x-a)^2 + 4y^2$$

$$\Longrightarrow (x+a)^2 = (x-a)^2$$

$$\Longrightarrow x^2 + 2ax + a^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$\Longrightarrow 4ax = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

(Om $a=0$ så är båda ellipserna samma ellips och kan då inte skära varandra, dvs. sig själv, i rät vinkel, så vi antar att $a \neq 0$.)

Den övre halvan (över x-axeln) av ellipsen $(x+a)^2 + 4y^2 = 1$ beskrivs av funktionen

$$y(x) = \frac{\sqrt{1-(x+a)^2}}{2},$$ med

derivata $$y'(x) = \frac{-(x+a)}{2\sqrt{1-(x+a)^2}}$$ och

$$y'(0) = -\frac{a}{2\sqrt{1-a^2}}.$$

Så tangentlinjen till $y = \frac{\sqrt{1-(x+a)^2}}{2}$
har lutning $k_1 = -\frac{a}{2\sqrt{1-a^2}}$ där $x=0$.

Den övre halvan av ellipsen $(x-a)^2 + 4y^2 = 1$
beskrivs av funktionen

$$y(x) = \frac{\sqrt{1-(x-a)^2}}{2} \quad , \text{ med}$$

derivata $y'(x) = \frac{-(x-a)}{2\sqrt{1-(x-a)^2}}$ och

$$y'(0) = \frac{a}{2\sqrt{1-a^2}} \, .$$

Så tangentlinjen till $y = \frac{\sqrt{1-(x-a)^2}}{2}$
har lutning $k_2 = \frac{a}{2\sqrt{1-a^2}}$ där $x=0$.

Om tangentlinjerna till de två ellipserna skall vara vinkelräta där $x=0$ (dvs. i skärningspunkterna) så

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \Rightarrow \frac{a}{2\sqrt{1-a^2}} = \frac{1}{\frac{a}{2\sqrt{1-a^2}}} = \frac{2\sqrt{1-a^2}}{a}$$

$$\Rightarrow a^2 = 4(1-a^2) = 4 - 4a^2$$

$$\Rightarrow 5a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Vi har bara undersökt tangentlinjernas lutning i skärningspunkten på den övre halvan av ellipserna, men pga ellipsernas symmetri kring x-axeln, så kommer de att skära varandra i räta vinklar även i den undre skärningspunkten om $a = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$. Detta kan man också komma fram till genom direkta uträkningar på samma sätt som ovan, men där man betraktar funktioner som beskriver de undre halvorna av ellipserna. (Man kan också lösa problemet med hjälp av implicit derivering.)

13. Först finner vi Taylor-utvecklingar kring $x=0$ för $\cos x$ och $\sin x$.

$f(x) = \cos x$ ger $f'(x) = -\sin x$ och $f''(x) = -\cos x$, så

$$\cos x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + O(x^3)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3) \quad \text{då } x \to 0.$$

På liknande sätt får man att

$$\sin x = x + O(x^3) \quad \text{då } x \to 0.$$

Substitutionen $x \mapsto 2x$ i $\cos x$ ger

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + O(x^3) \quad \text{då } x \to 0,$$

och substitutionen $x \mapsto x^2$ i $\sin x$ ger

$$\sin(x^2) = x^2 + O(x^6) \quad \text{då } x \to 0.$$

Detta ger

$$\frac{\cos(2x) - 1}{\sin(x^2)} = \frac{1 - 2x^2 + O(x^3) - 1}{x^2 + O(x^6)} =$$

$$= \frac{x^2(-2 + O(x))}{x^2(1 + O(x^4))} = \frac{-2 + O(x)}{1 + O(x^4)} \to -2$$

då $x \to 0$.

<u>Alltså gäller att</u> $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{\sin(x^2)} = -2.$

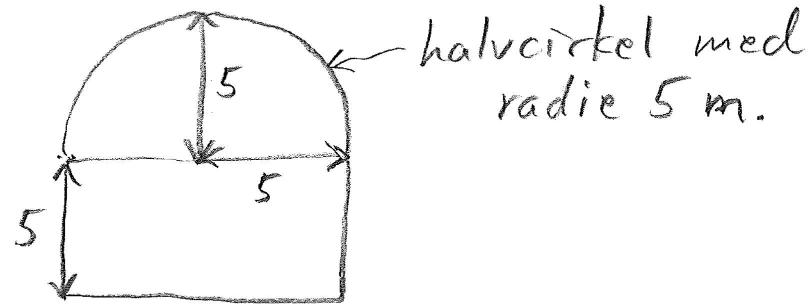
$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^{752}}{\ln(1+x)} = \boxed{\text{l'Hospitals regel}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{752(\sin x)^{751} \cos x}{\frac{1}{1+x}} = 0, \text{ eftersom}$$

$\frac{1}{1+x} \to 1$ och $\sin x \to 0$ då $x \to 0$

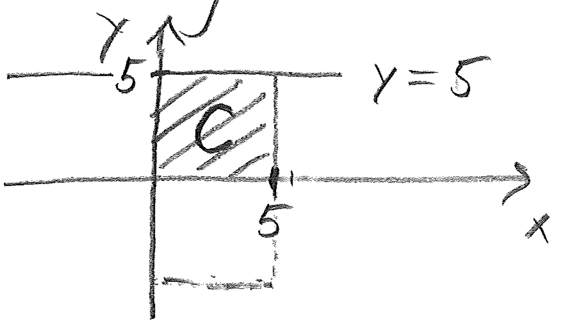
__Alltså:__ $\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^{752}}{\ln(1+x)} = 0$.

14. Observatoriet från sidan:



Kalla volymen av den del av observatoriet som är en cylinder för V_1, och volymen av den del (taket) som är ett halvklot för V_2.

Cylinderns volym, V_1, är volymen av kroppen som uppstår då området C roterar kring x-axeln



(9)

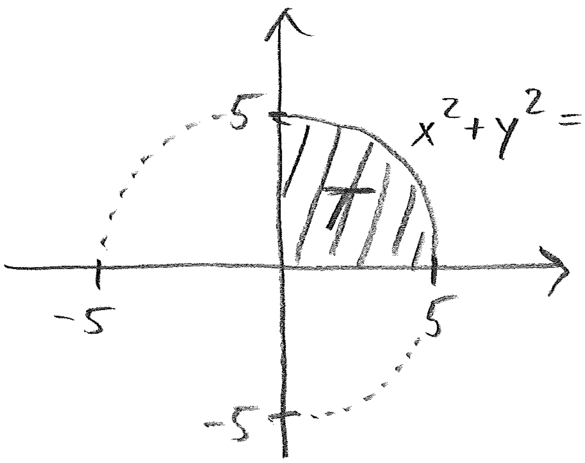
Därför gäller att

$$V_1 = \pi \int_0^5 5^2\,dx = \pi \left[25x \right]_0^5 = 125\pi .$$

(Man kan också räkna ut V_1 genom rotation av C kring y-axeln:

$$V_1 = 2\pi \int_0^5 x \cdot 5\,dx = 2\pi \left[\frac{5x^2}{2} \right]_0^5 = 125\pi .)$$

Volymen V_2 är volymen av den kropp som uppstår då området T roterar kring x-axeln, alternativt kring y-axeln. (I båda fallen får man ett halvklot med radien 5.)



$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$ (om $y \geq 0$).

Beräkning med rotation kring x-axeln ger

$$V_2 = \pi \int_0^5 \left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_0^5 (25 - x^2)\,dx =$$

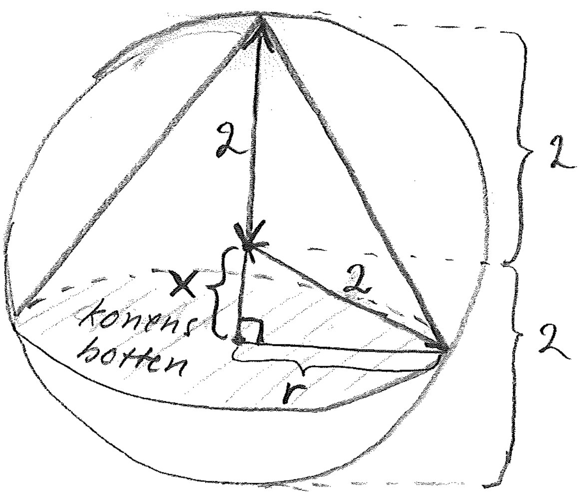
$$= \pi\left[25x - \frac{x^3}{3}\right]_0^5 = \pi\left(125 - \frac{125}{3}\right)$$

$$= \frac{250\pi}{3}.$$

Observatoriets volym är då

$$V_1 + V_2 = 125\pi + \frac{250\pi}{3} = \frac{625\pi}{3}\ m^3.$$

15. I figuren är en kon inskriven i ett klot med radie 2.



r = radien hos konens botten.

konens höjd $= h = 2 + x$ där $0 \le x \le 2$.

(Om $x < 0$ så får vi en kon som är helt innesluten i det övre halvklotet och då kan <u>inte</u> konen ha maximal volym, eftersom både konens höjd och bottenradie kan ökas om $x < 0$.)

Pythagoras sats ger

$$x^2 + r^2 = 4 \text{ så } r^2 = 4 - x^2$$

och konens volym V är

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi(4-x^2)(2+x)}{3} \text{ så}$$

$$V(x) = \frac{1}{3}(8\pi + 4\pi x - 2\pi x^2 - \pi x^3).$$

$$V'(x) = \frac{1}{3}(4\pi - 4\pi x - 3\pi x^2).$$

Pga. kontinuitet så antar $V(x)$ ett största värde på $[0,2]$ och detta sker antingen i någon av ändpunkterna eller i en kritisk punkt (där $V'(x)=0$).

$$V'(x) = 0 \iff 4\pi - 4\pi x - 3\pi x^2 = 0$$

$$\iff x = \frac{2}{3} \quad (\text{eftersom } x \in [0,2])$$

Eftersom $V(2)=0$ är det minsta värdet som $V(x)$ antar på $[0,2]$ så är enda möjligheten att det största värdet antas i $x=\frac{2}{3}$ eller i $x=0$. Jämförelse mellan $V(0)=\frac{8\pi}{3}$ och $V(\frac{2}{3})=\frac{256\pi}{81}$ visar att $\frac{256\pi}{81}$ är den största volym som konen kan ha.