# Svar/lösningar 2011-03-22.

1. $\lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x}$ existerar inte.

$$\lim_{x\to 0+} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

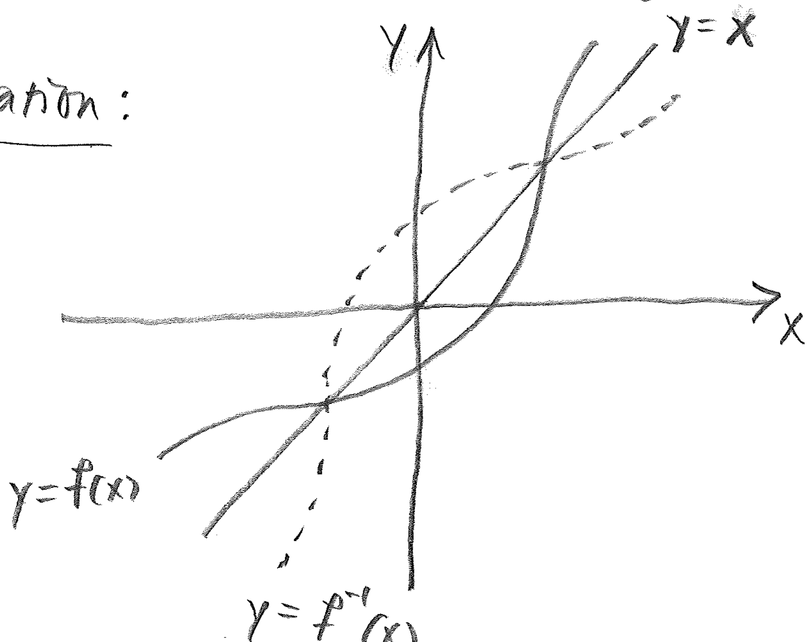
2. $f'(x) = 2xe^{x^2}\sin x + e^{x^2}\cos x$.

$$g'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

3. $f'(1) = -5$.

4. Kurvan $y = f^{-1}(x)$ är speglingen av kurvan $y = f(x)$ kring linjen $y = x$.

Illustration:



5. $\log_5 x$, $x^2$, $x^3$, $3^x$.

6. $f$ har lokalt maximum i $x=2$.
$f$ har inget globalt maximum.
$f$ har lokala minimum i $x=1$ och $x=3$.
Minst en av de lokala minimi-punkterna är en global minimi-punkt.

7. Taylorpolynomet av grad 2 för $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ kring punkten $x=1$ är

$$-1 + 2(x-1) - 3(x-1)^2.$$

8. $$\int (x - \tfrac{1}{x})\,dx = \frac{x^2}{2} - \ln x + C$$

$$\int_1^2 (x - \tfrac{1}{x})\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \ln x\right]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \ln 2$$

$$-\left(\frac{1^2}{2} - \ln 1\right) = \frac{3}{2} - \ln 2.$$

9. $\int_1^2 (x - \frac{1}{x})\,dx$ är arean av området som begränsas/inneslutes av linjerna $x=1$, $x=2$, $y=x$ och kurvan $y=\frac{1}{x}$.

10. $\lim_{a \to 0+} \int_a^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \, dx = \lim_{a \to 0+} \left[ \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} \right]_a^1$

$= \lim_{a \to 0+} \left( \frac{3}{2} - \frac{3a^{\frac{2}{3}}}{2} \right) = \frac{3}{2}$ ,

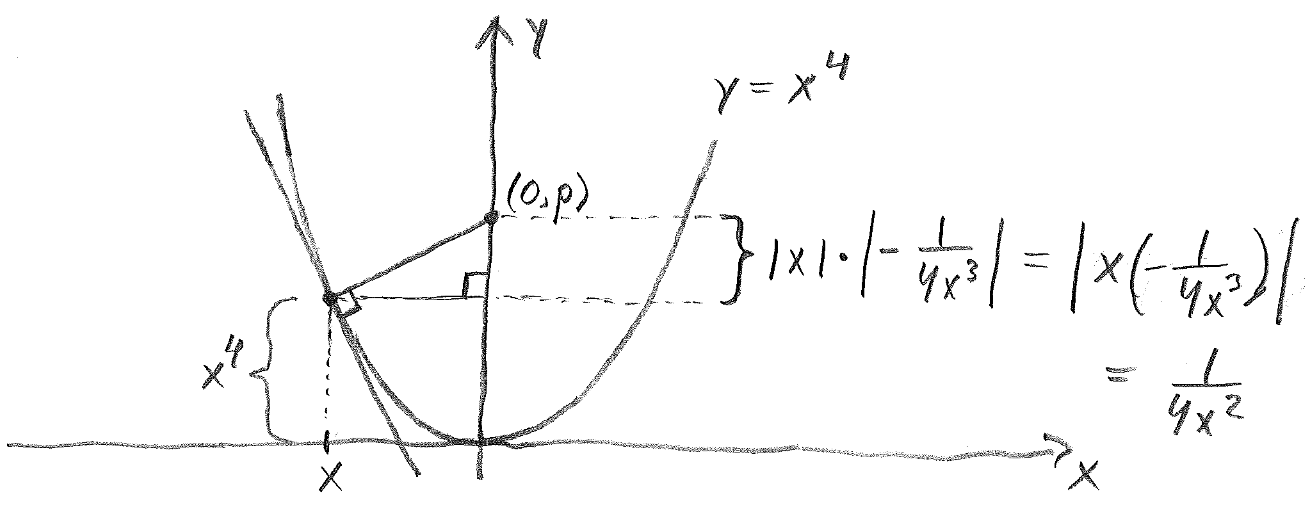
så $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}} \, dx$ är konvergent med värdet $\frac{3}{2}$ .

11. Antag att $(x, y)$, $x \neq 0$, ligger på kurvan $y = x^4$. Då är tangentlinjens lutning i $(x, y)$ lika med

$$y' = 4x^3$$

och normallinjens lutning i $(x, y)$ är

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{1}{4x^3} .$$



Lägg märke till (se figur ovan) att

$$p = p(x) = x^4 + |x| \cdot \left| -\frac{1}{4x^3} \right| =$$

$$= x^4 + \left| x \cdot \left( -\frac{1}{4x^3} \right) \right|$$

$$= x^4 + \left| -\frac{1}{4x^2} \right| = x^4 + \frac{1}{4x^2} .$$

Så $p(x) = x^4 + \frac{1}{4x^2}$ är avståndet mellan $(0,0)$ och $(0,p)$.

Vi söker det minsta värde som $p(x)$ kan anta. Vi har

$$p'(x) = 4x^3 - \frac{1}{2x^3} ,$$

och $p'(x) = 0 \iff 4x^3 = \frac{1}{2x^3} \iff x^6 = \frac{1}{8}$

$$\iff x = \pm \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{6}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Eftersom $p(-x) = p(x)$ för alla $x \neq 0$

och $\lim_{x \to -\infty} p(x) = \lim_{x \to \infty} p(x) = \lim_{x \to 0} p(x) = \infty$,

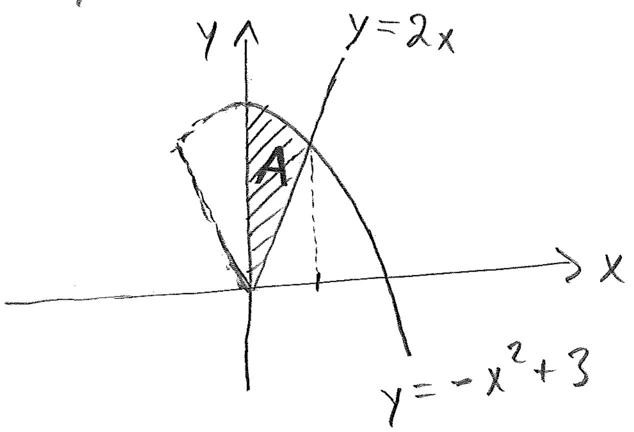
så måste $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ vara globala minimi-punkter (pga $p$'s kontinuitet).

Det kortaste avståndet mellan $(0,0)$ och

$(0, p)$ är därför $p(\frac{1}{\sqrt{2}}) = p(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 5$

$= \frac{3}{4}$.

12. Det inneslutna området A är markerat i figuren. (Man kan tolka området på ett annat sätt, men får då inte en syl-liknande rotationskropp.)




Vi söker först skärningspunkten för $y=2x$ och $y=-x^2+3$ där $x>0$:

$$2x = y = -x^2+3$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+2x-3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 1, \text{ eftersom vi antar } x>0.$$

Den sökta volymen, $V$, ges nu av

$$V = 2\pi \int_0^1 x(-x^2+3)\,dx - 2\pi \int_0^1 x(2x)\,dx =$$

$$= 2\pi \int_0^1 (-x^3 + 3x)\,dx - 2\pi \int_0^1 2x^2\,dx$$

$$= 2\pi \left[ -\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^1 - 2\pi \left[ \frac{2x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= 2\pi \left( -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \right) - 2\pi \frac{2}{3} = \frac{7\pi}{6}.$$

13. $$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + 3x^2 - x - 3} = \boxed{\text{l'Hospitals regel}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 2x + 1}{3x^2 + 6x - 1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

För att beräkna det andra gränsvärdet så Taylorutvecklar vi kring $x = 0$.

$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin x \Rightarrow f''(x) = -\cos x.$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ då $x \to 0$, och

$$\boxed{\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + O(x^6) \text{ då } x \to 0.}$$

$g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x \Rightarrow g''(x) = e^x.$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ då $x \to 0$, och

$$\boxed{e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + O(x^6) \text{ då } x \to 0.}$$

$$h(x) = \sin x \Rightarrow h'(x) = \cos x \Rightarrow h''(x) = -\sin x.$$

$$\boxed{\sin x = x + O(x^3) \quad \text{då} \quad x \to 0.}$$

Vi får nu (i närheten av $x=0$)

$$\frac{\cos(x^2) - e^{(x^2)}}{x \sin x} = \frac{1 - \frac{x^4}{2} + O(x^6) - 1 - x^2 - \frac{x^4}{2} - O(x^6)}{x^2 + O(x^4)}$$

$$= \frac{-x^2 + O(x^4)}{x^2 + O(x^4)} = \frac{x^2(-1 + O(x^2))}{x^2(1 + O(x^2))}$$

$$= \frac{-1 + O(x^2)}{1 + O(x^2)} \to -1 \quad \text{då} \quad x \to 0.$$

Alltså gäller: $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x^2) - e^{(x^2)}}{x \sin x} = -1.$

14. Låt $f(x) = x^2 e^{-x^2}$. Vi får

$$f'(x) = 2x e^{-x^2} + x^2(-2x) e^{-x^2}$$
$$= e^{-x^2}(2x - 2x^3), \quad \text{och}$$

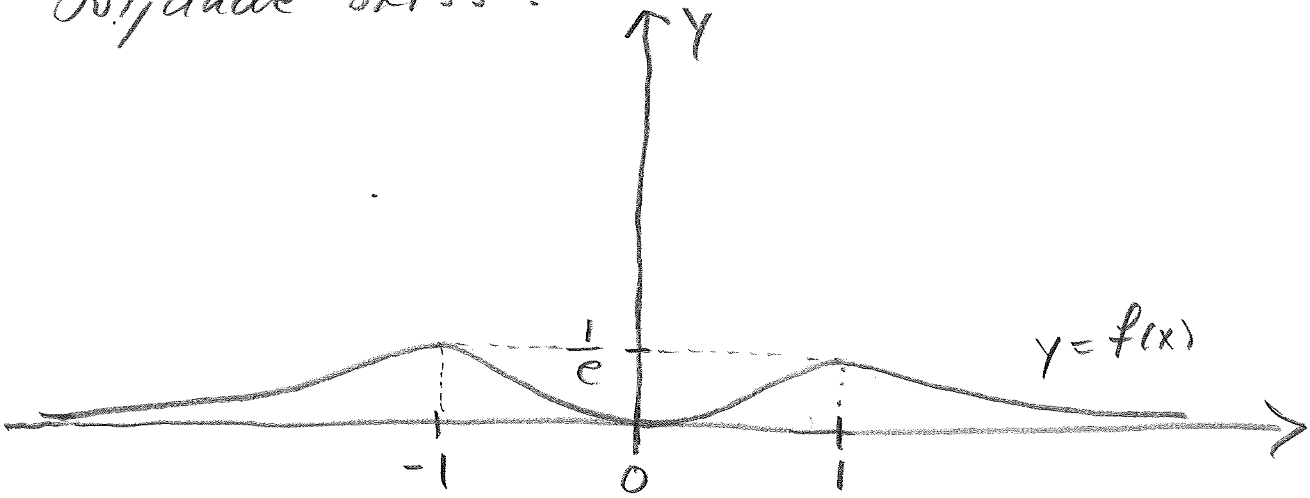
$$f'(x) = 0 \iff 2x - 2x^3 = 0 \quad \left(\text{eftersom } e^{-x^2} > 0 \text{ för alla } x\right)$$
$$\iff x(1 - x^2) = 0$$
$$\iff x = 0 \text{ eller } x = 1 \text{ eller } x = -1.$$

Och $f'(x) = 2e^{-x^2} x(1-x)(1+x)$.

Teckentabell:

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$ | $\searrow$ |

Vi noterar också att $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ (standardgränsvärden), och tillsammans med tabellen får vi följande skiss:




Vi ser också att $f$ antar alla värden i intervallet $[0, \frac{1}{e}]$, men inga andra värden.

15. Informationen att tangentlinjens lutning till $y = h(x)$ i $(x, h(x))$ är $kx$ innebär att

$$h'(x) = kx$$

vilket medför att

$$h(x) = \frac{kx^2}{2} + C$$

för någon konstant $C$.

Informationen att $h(0) = 1$ och $h(1) = -1$ ger

$$\begin{cases} C = 1 \\ \frac{k}{2} + C = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 1 \\ k = -4 \end{cases}.$$

Så $h(x) = \frac{-4x^2}{2} + 1 = -2x^2 + 1$.