1

Svar / Lösningsförslag 2012-03-12

1. $$\lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{mellan } -1 \text{ och } 1} = 0$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = 4$$

2. $$f'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kedje-} \\ \text{regeln}}}{=} 2x\cdot e^{2x+1}$$

$$g'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{produkt-} \\ \text{regeln}}}{=} 4x^3\ln(x) + x^4\cdot\frac{1}{x} = 4x^3\ln(x) + x^3$$

3. $f'(x) = 4x^3$. Lutningen är

$f'(1) = 4$

4. $f'(x) = 2x > 0$ om $x > 0$

$\Rightarrow f(x)$ strikt växande på $[0,\infty)$

$\Rightarrow f$ inverterbar på $[0,\infty)$

$$y = x^2+1 \Rightarrow x^2 = y-1 \Rightarrow x \underset{\substack{\uparrow \\ x\geq 0}}{=} \stackrel{+}{(-)} \sqrt{y-1}$$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$

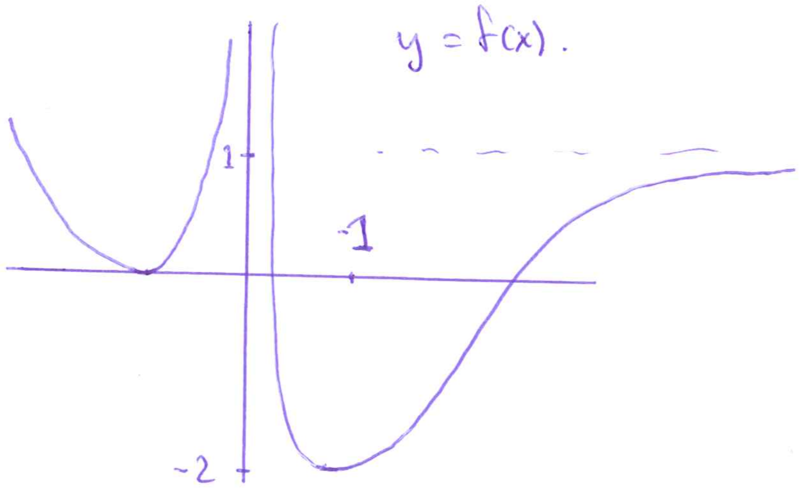
(f är också inverterbar på $(-\infty, 0]$, med invers $f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$.)

②

5. $\underbrace{\cos(x)+2}_{\text{begränsad}} < \underset{= x^{1/2}}{\sqrt{x}} < x^2 < e^{x^2}$

växer snabbare än e^x, och e^x snabbare än polynom

6.



7. $f(x) = x + \sin(x)$ $\quad f(0) = 0$

$f'(x) = 1 + \cos(x)$ $\quad f'(0) = 2$

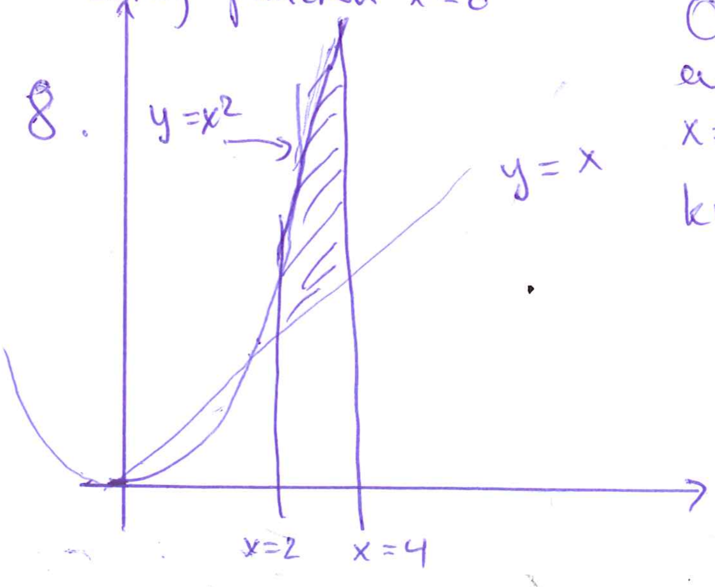
$f''(x) = -\sin(x)$ $\quad f''(0) = 0$

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 =$$

$$= 0 + 2x + 0 = \underline{\underline{2x}}$$

a = 0 eftersom kring punkten x = 0

8.



Området begränsas av linjerna $x=2$, $x=4$, $y=x$ och kurvan $y=x^2$.

3

9. $\int \left(\frac{1}{x} - \sin(x)\right) dx = \ln|x| + \cos(x) + C$

$$\int_1^{\pi} \left(\frac{1}{x} - \sin(x)\right) dx = \Big[\ln(x) + \cos(x)\Big]_1^{\pi} =$$

$$= \Big(\ln(\pi) + \cos(\pi)\Big) - \Big(\underbrace{\ln(1)}_{=0} + \cos(1)\Big) =$$

$$= \ln(\pi) - 1 - \cos(1)$$

10. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{=x^{-3}} dx =$

$$= \lim_{R\to\infty} \underbrace{\left[-\frac{x^{-2}}{2}\right]_1^R}_{= -\frac{1}{2x^2}} = \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{2R^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

så integralen är konvergent och konverar till $\frac{1}{2}$.

4

11. $f(x) = \dfrac{e^{x^2-1}}{x^2+1}$

$$f'(x) \underset{\text{kvotregeln}}{=} \frac{2x e^{x^2-1}(x^2+1) - e^{x^2-1}(2x)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 e^{x^2-1}}{(x^2+1)^2} > 0 \text{ om } x > 0.$$

Därför är $f(x)$ strikt växande på $[0,1]$.

$\min = f(0) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\max = f(1) = \frac{1}{2}$

(5) 12. Linjen $y=2x+m$ har lutning 2.
Om två linjer skär varandra vinkelrätt är produkten av deras lutning -1.
Vi söker alltså en punkt på grafen till $f(x)=x^4+1$ där tangentlinjen till grafen har lutning $-\frac{1}{2}$.

$$f'(x)=4x^3=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^3=-\frac{1}{8} \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$f(-\frac{1}{2})=\frac{17}{16}$. Linjen ska alltså skära grafen i $(-\frac{1}{2}, \frac{17}{16})$.

$$\frac{17}{16}=2\cdot(-\frac{1}{2})+m \Rightarrow m=\frac{17}{16}+1=\frac{33}{16}.$$

Svar: Linjen skär grafen till $f(x)$ vinkelrätt i punkten $(-\frac{1}{2}, \frac{17}{16})$ om $m=\frac{33}{16}$.

⑥ 13. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 - x} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+1)}{x(x+1)(x-1)} =$$

Polynomdivision med $(x-1)$ i täljaren.
Bryt ut x och använd konjugatregeln i nämnaren

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x^2+1)}{x(x+1)} = \frac{2}{2} = 1$$

För det andra gränsvärdet Taylorutvecklar vi $\ln(1+x)$ kring $x=2$ upp till ordning 2.

$f(x) = \ln(1+x)$ $\quad$ $f(0) = \ln(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$ $\quad$ $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ $\quad$ $f''(0) = -1$,

så $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) \Rightarrow$

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)}{x^2} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}\mathcal{O}(x^3)}{1} \to -\frac{1}{2}, \text{ då } x \to 0.$$

7 14. Beteckna integralen med I.

$$I = \int_0^\pi \cos(x)\, e^x \, dx = \left[\cos(x)\, e^x\right]_0^\pi + \int_0^\pi \sin(x)\, e^x \, dx =$$

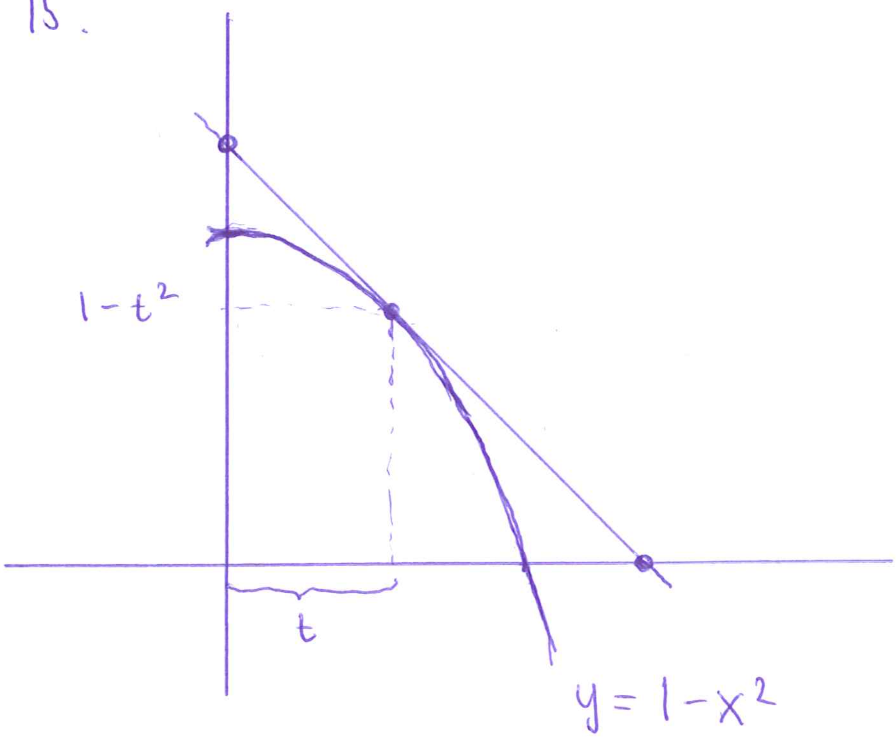
$$= \left[\cos(x)\, e^x\right]_0^\pi + \left[\sin(x)\, e^x\right]_0^\pi - \underbrace{\int_0^\pi \cos(x)\, e^x \, dx}_{I},$$

så $I = \frac{1}{2}\left(\left[\cos(x)\, e^x\right]_0^\pi + \left[\sin(x)\, e^x\right]_0^\pi\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(-e^\pi - 1 + 0\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\left(e^\pi + 1\right)}}$$

8

15.



Vi ser att linjen måste tangera grafen till $f(x)=1-x^2$ i en punkt.
Låt x-koordinaten för denna punkt vara t, då blir y-koordinaten $f(t)=1-t^2$.

$f'(x)=-2x$, så linjens lutning blir $-2t$. Vi tar fram linjens ekvation med enpunktsformeln:

$$y=(x-\underset{x_0}{t})\cdot(-2\underset{k}{t})+\underbrace{1-t^2}_{y_0}=t^2-2xt+1.$$

⑨ För att få fram basen och höjden av triangeln tar vi fram linjens skärning med x-axeln resp. y-axeln.

$y=0 \Rightarrow t^2-2xt+1=0$

$\Rightarrow 2xt = t^2+1 \Rightarrow x = \dfrac{t^2+1}{2t}$.

$x=0 \Rightarrow y = t^2+1$, så triangelns area som en funktion av t är

$$A(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2+1}{2t} \cdot (t^2+1)\right) = \frac{(t^2+1)^2}{4t} =$$

$$= \frac{t^4+2t^2+1}{4t}, \quad \text{där } t \in (0,1]$$

Eftersom $\lim\limits_{t \to 0+} A(t) = \infty$ måste

min antas i en kritisk punkt eller i en endpunkt. Vi börjar med kritiska punkter:

$$0 = A'(t) = \frac{(4t^3+4t)\cdot 4t - (t^4+2t^2+1)\cdot 4}{(4t)^2} =$$

$$= \frac{16t^4+16t^2-4t^4-8t^2-4}{(4t)^2} = \frac{12t^4+8t^2-4}{16t^2}$$

$\Rightarrow 12t^4+8t^2-4=0$

10 $\Rightarrow \quad t^4 + \frac{2}{3}t^2 - \frac{1}{3} = 0$

Låt $s = t^2$

$\Rightarrow \quad s^2 + \frac{2}{3}s - \frac{1}{3} = 0$

$\Rightarrow \quad s = -\frac{1}{3} \overset{+}{(-)} \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{4}{9}} = 1$

$s > 0$, eftersom $s = t^2$

$\Rightarrow \quad t = \overset{+}{(-)} \sqrt{1} = 1$, så den

$t > 0$

kritiska punkten är lika med endpunkten

$\Rightarrow$ Det minsta värdet $A(t)$ antar då $t \in (0, 1]$ är $A(1) = 1$.